



杭州电子科技大学
HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY

Digital Image Processing

数字图像处理

杭州电子科技大学自动化学院

周晓飞





第3章 灰度变换与空间滤波

- 3.1 背景
- 3.2 一些基本的灰度变换函数
- 3.3 直方图处理
- 3.4 空间滤波基础
- 3.5 平滑（低通）空间滤波器
- 3.6 锐化（高通）空间滤波器
- 3.7 低通、高通、带阻、和带通滤波器
- 3.8 组合使用空间增强方法

■ 引言

- 空间域图像处理方法是直接对图像中的像素进行处理
- 两个主要类别：灰度变换 & 空间滤波
- 灰度变换是对图像的各个像素进行处理
- 空间滤波是对图像的各像素的邻域进行处理

■ 学习目标

- 灰度变换
- 图像直方图
- 空间滤波（空间卷积）

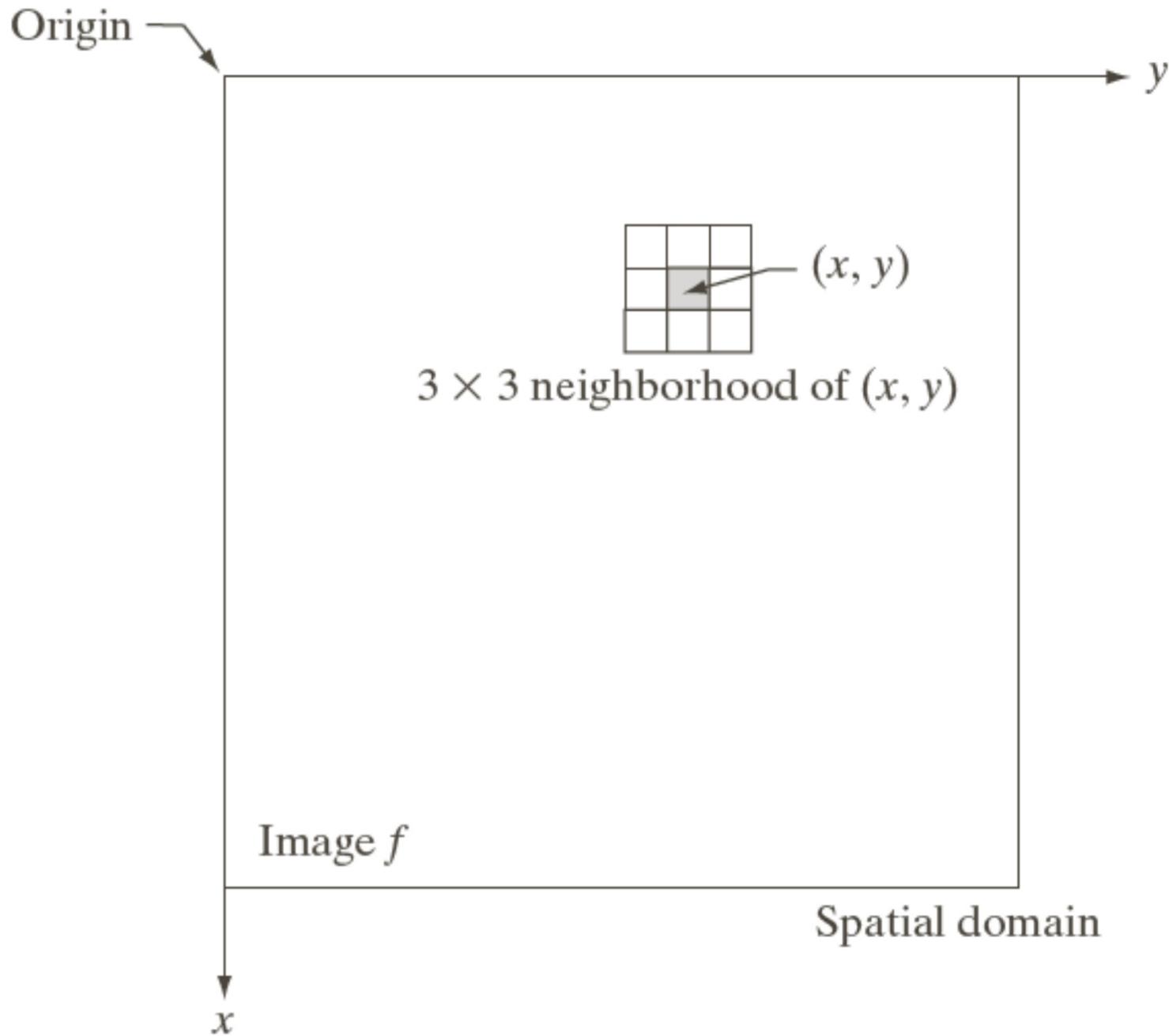
3.1 背景

- 灰度变换和空间滤波的基础
 - 空间域处理基于

$$g(x, y) = T[f(x, y)]$$

f 是输入图像， g 是输出图像， T 是在点 (x, y) 的一个邻域上定义的针对 f 的算子，亦被称为灰度变换函数

- 将邻域的中心从一个像素移到另一个像素，并将算子 T 应用到邻域中的像素，以便在该位置产生一个输出值
- 这一过程始于输入图像的左上角，并且水平扫描、一次一行（列）的逐个像素进行处理





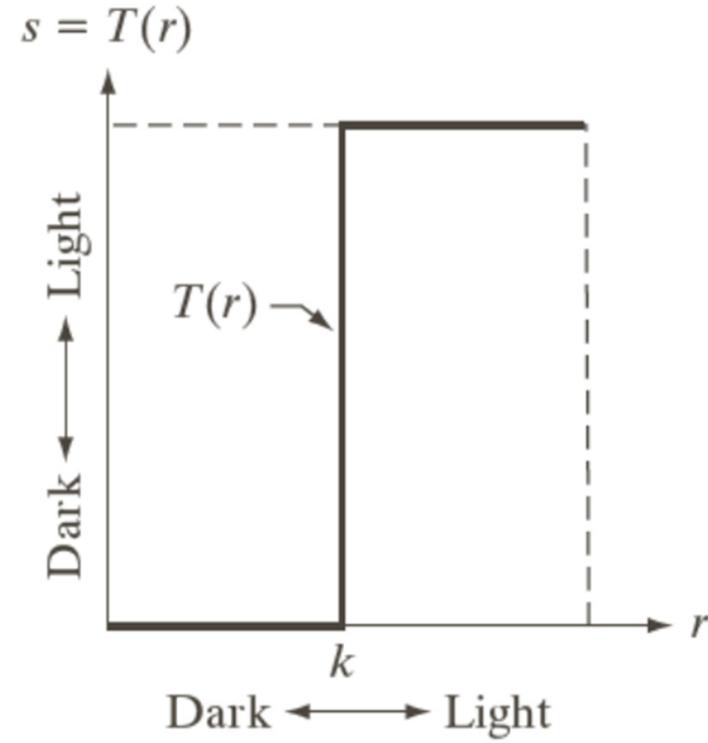
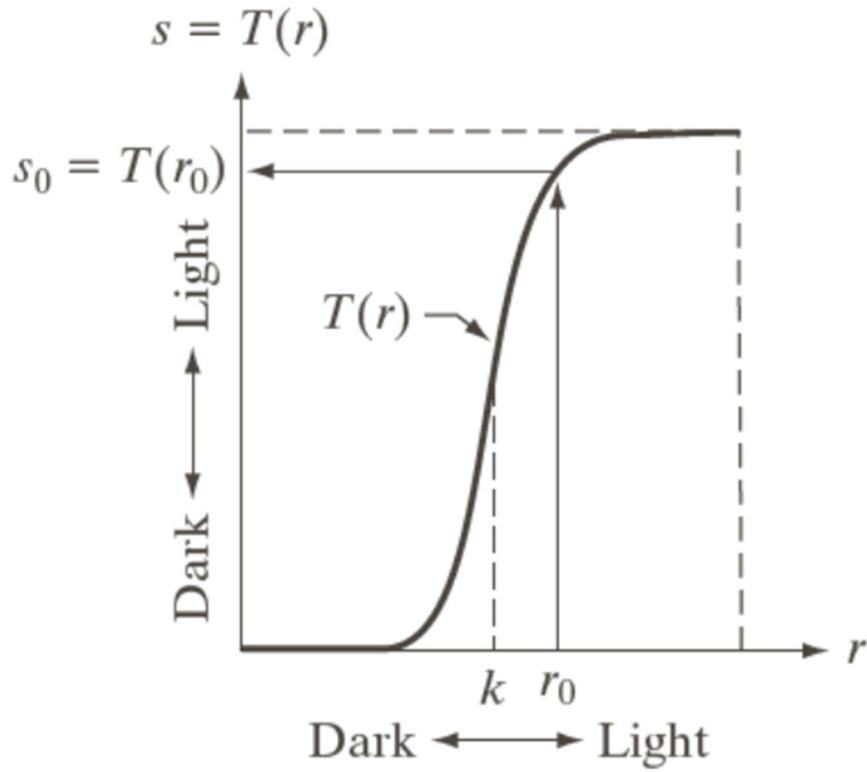
背景

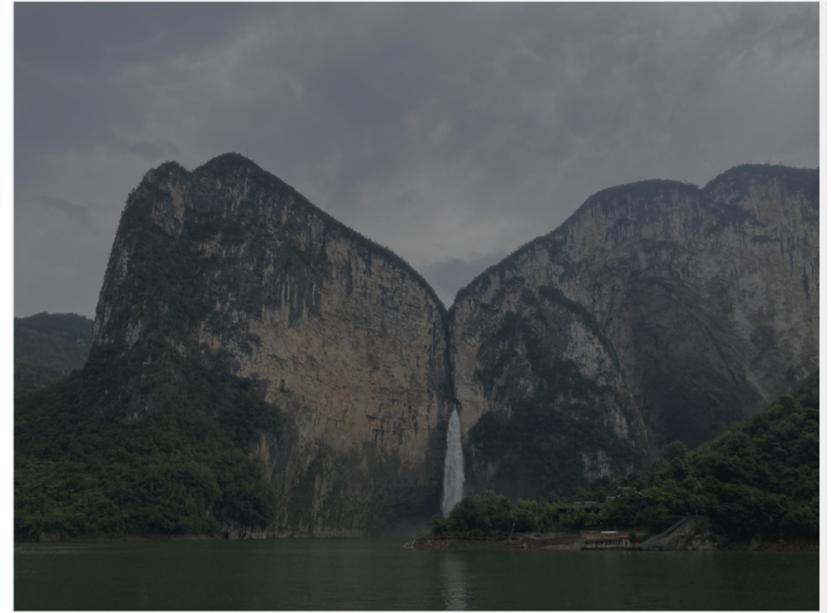
- 结果仅取决于点的灰度方法称为**点处理技术**
- 最小邻域 1×1 ， g 只依赖于点 (x,y) 处的 f 值，此时 T 为灰度变换函数

$$s = T(r)$$

s/r 对应于 g 和 f 在任意点 (x,y) 处的灰度

- **对比度拉伸**：将 k 以下的灰度级变暗，将高于 k 的灰度级变亮，产生一幅比原图像对比度更高的图像
- **阈值处理**：对比度拉伸的极限情况下， $T(r)$ 产生一幅二级（二值）图像





3.2 一些基本的灰度变换函数

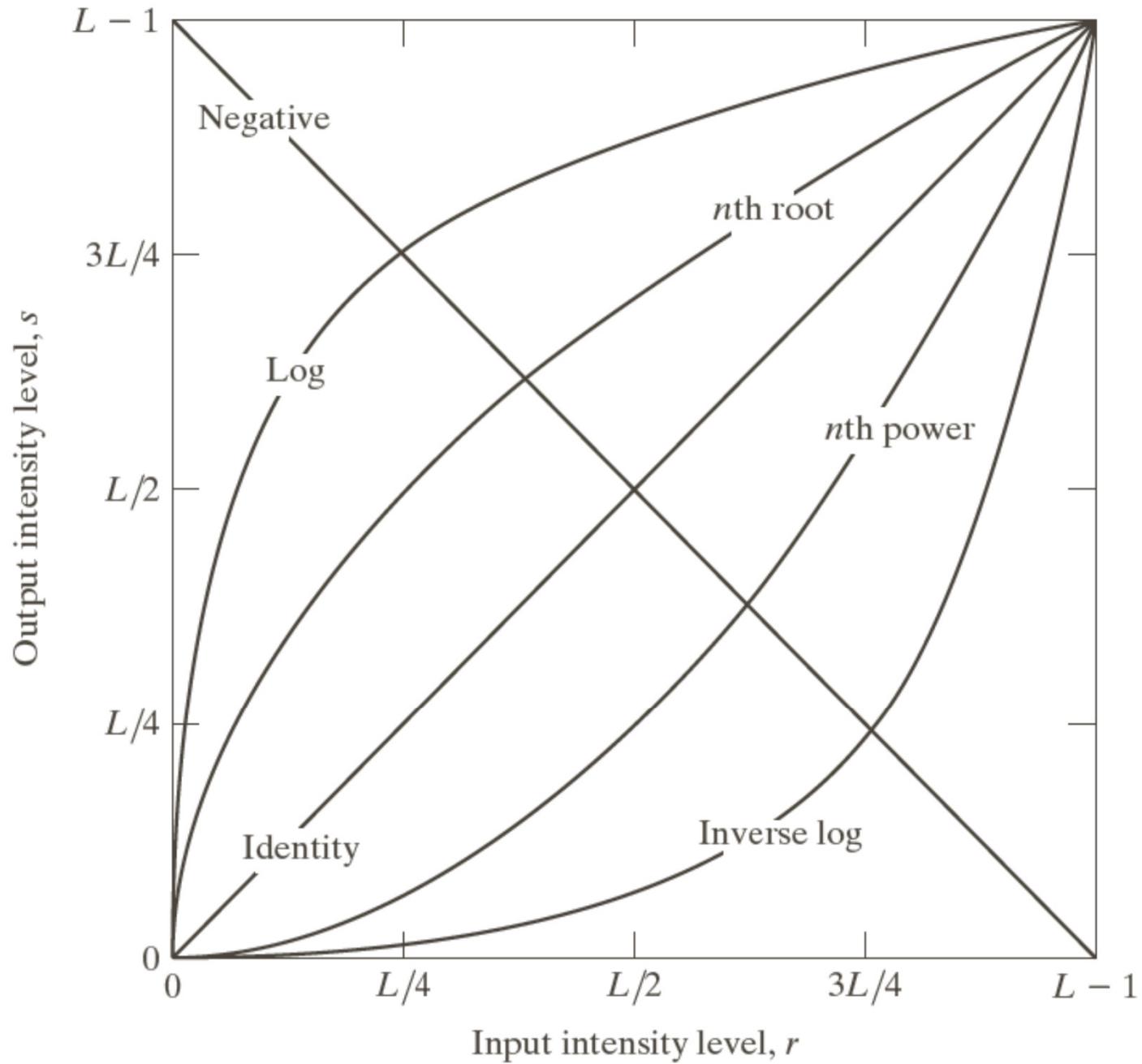
图像处理中频繁使用的三类基本函数：线性函数（反转和恒等变换）、对数（对数和反对数变换）函数、幂律（n次幂和n次根变换）

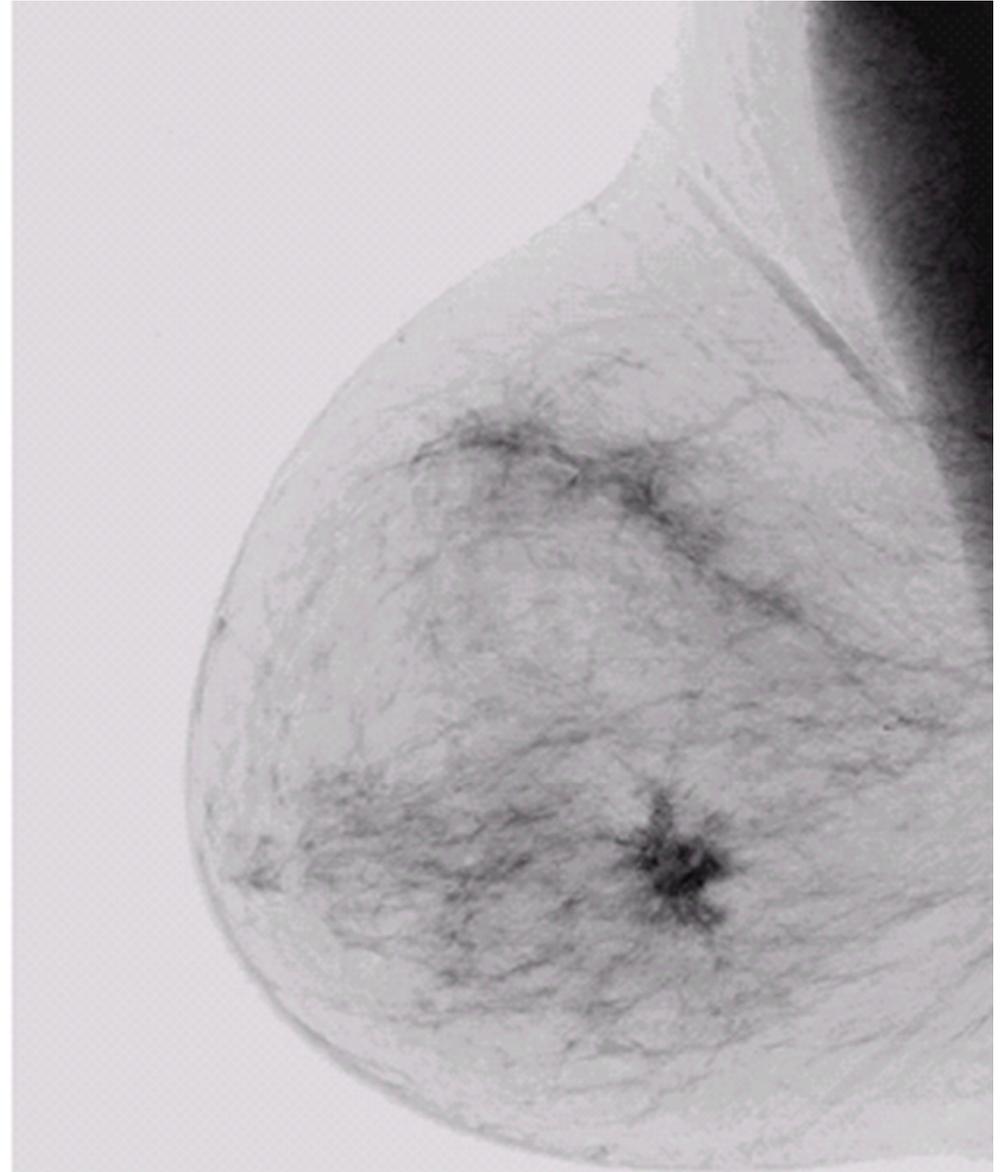
■ 1 图像反转（Negative）

- 应用如图所示反转变换函数，得到的灰度级在区间 $[0, L-1]$ 内的反转图像为

$$s = L - 1 - r$$

- 此类反转可用于增强图像暗色区域中的白色或者灰色细节，暗色区域的尺寸很大时这种增强效果更好

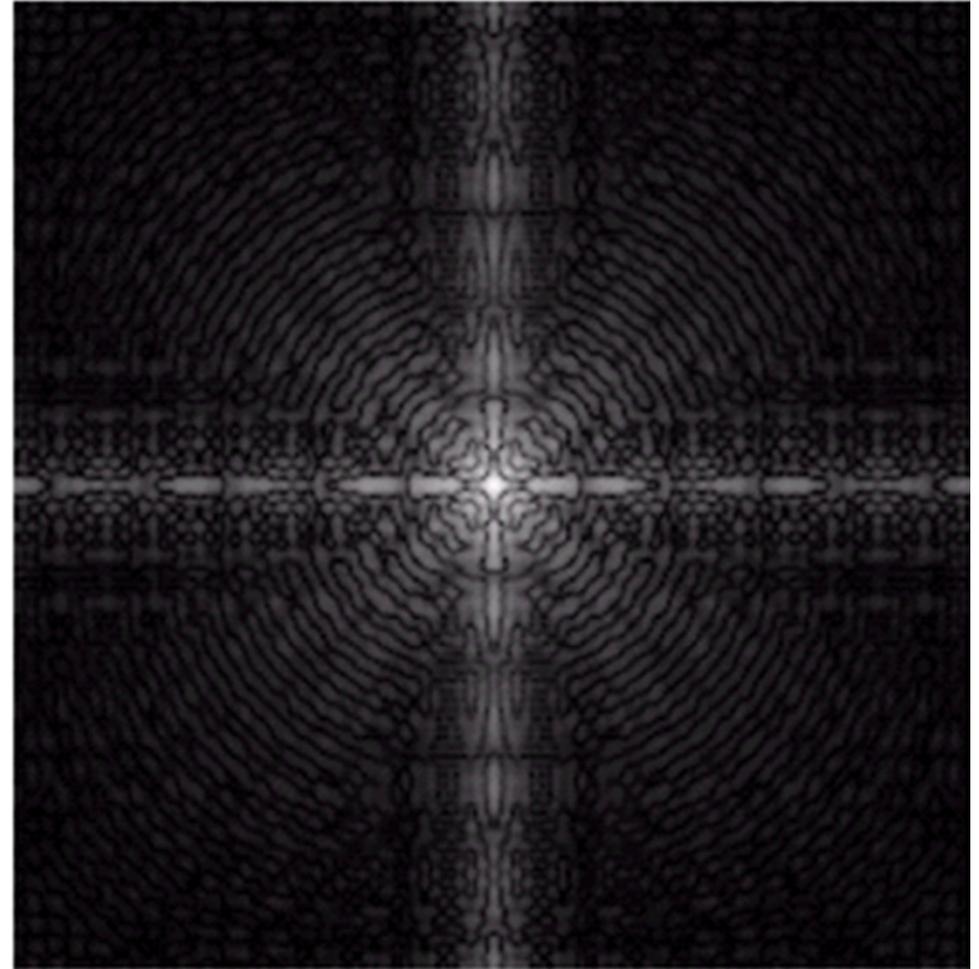
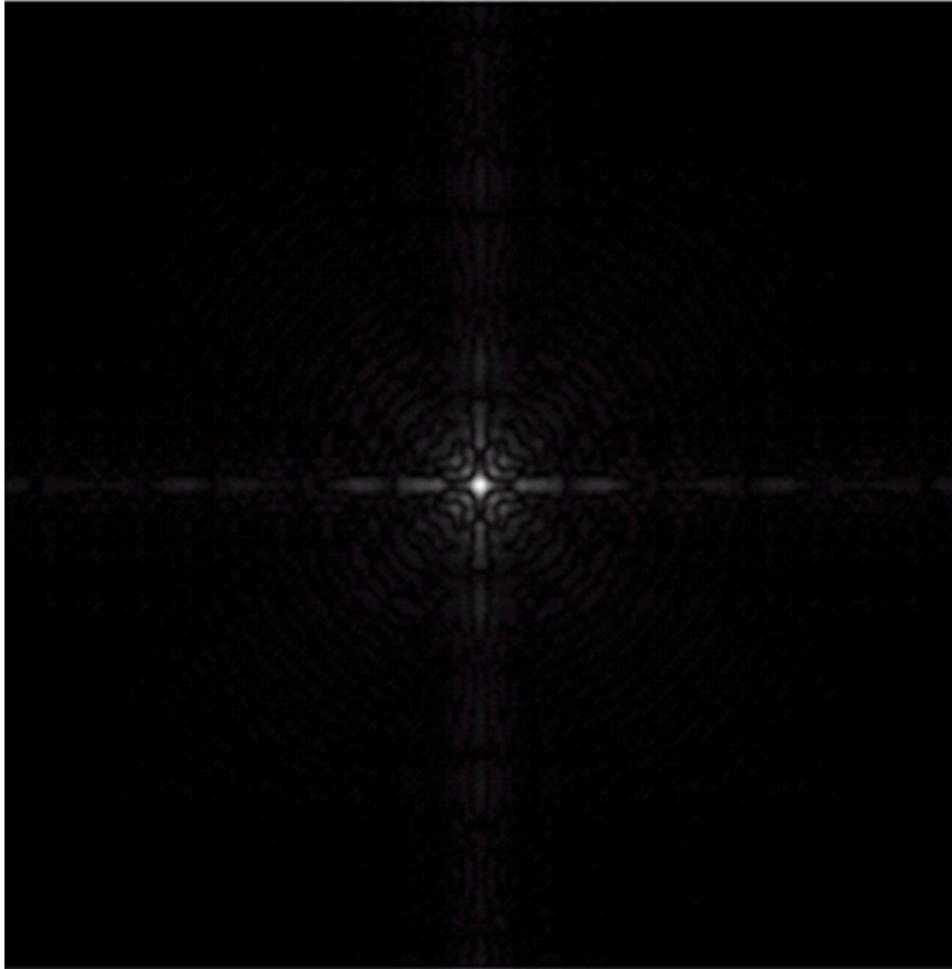






3.2 一些基本的灰度变换函数

- 2 对数变换
 - 对数变换公式 $s = c \log(1 + r)$
 - 将输入中范围较窄的低灰度值映射为输出中范围较宽的灰度级
 - 将输入中的高灰度值映射为输出中范围较窄的灰度级
 - 可用此类变换扩展图像中的暗像素值，压缩高灰度级值





3.2 一些基本的灰度变换函数

- 3 幂律变换

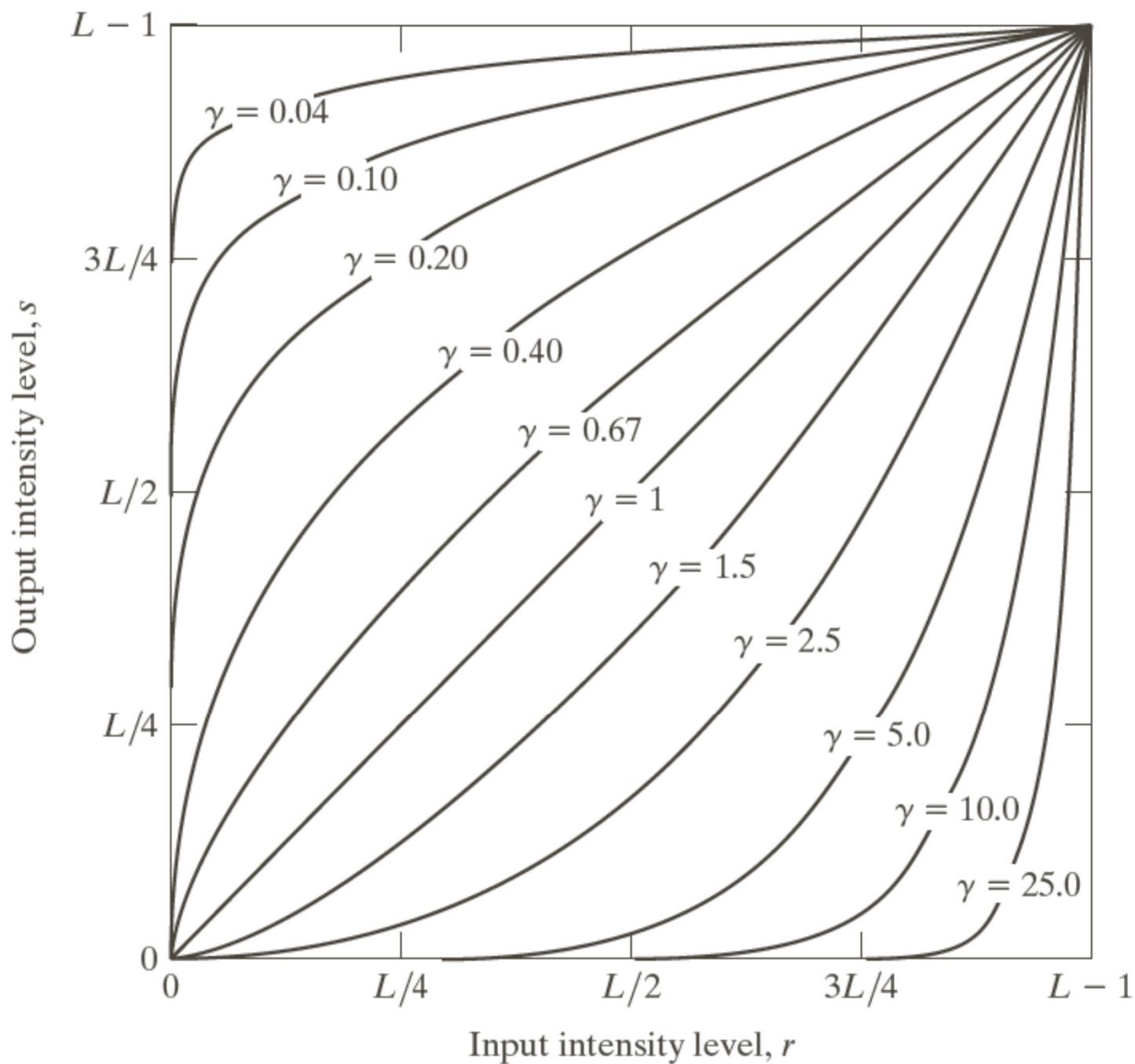
- 幂律变换公式 $s = cr^\gamma$

- ✓ 其中 c 和 γ 是正常数

- ✓ $\gamma < 1$ 提高灰度级，图像变亮

- ✓ $\gamma > 1$ 降低灰度级，图像变暗

- 类似对数变换，通过 γ 可以将较窄范围的暗输入值映射为较宽范围的输出值，将高输入值映射为较窄范围的输出值



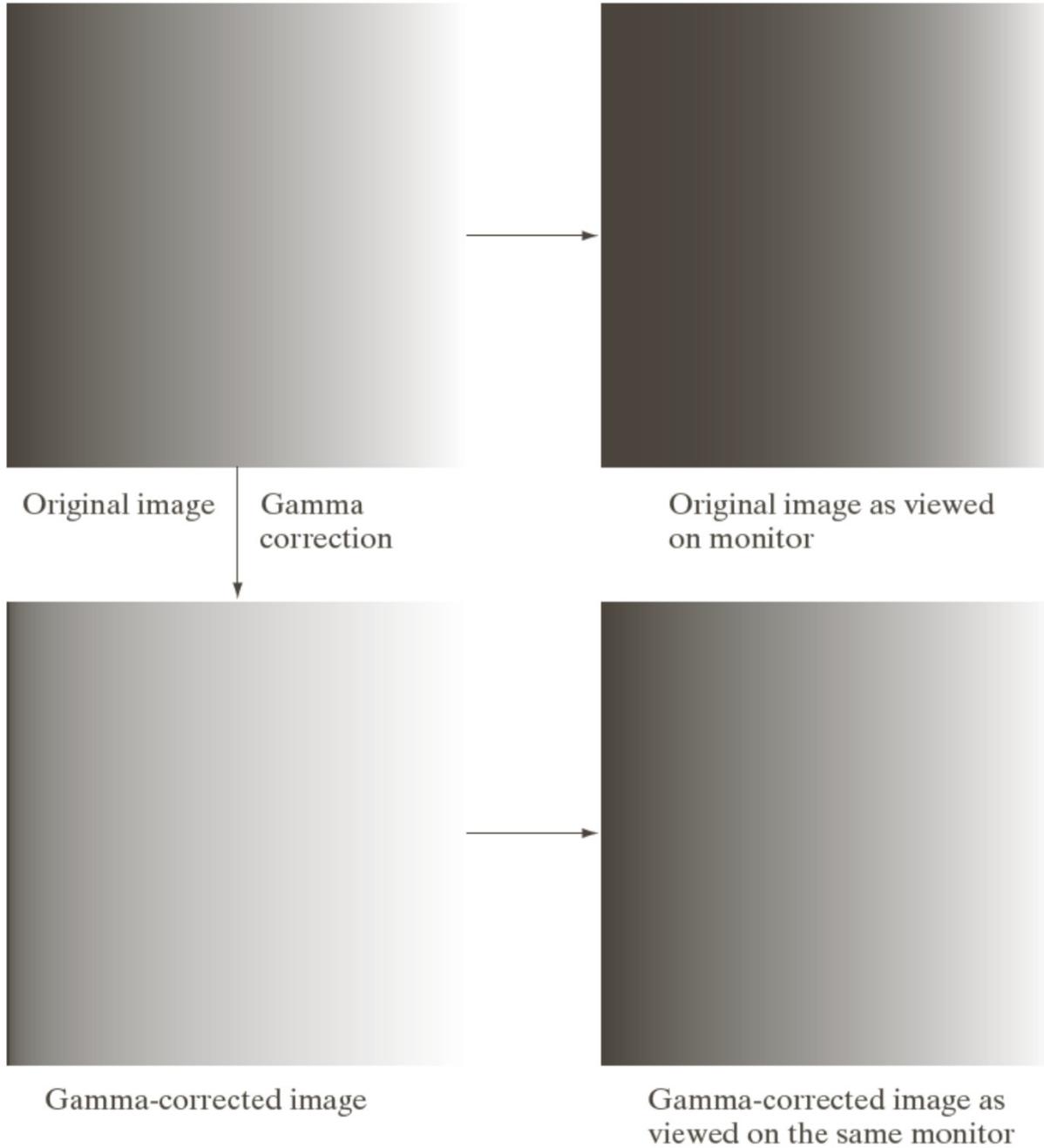


3.2 一些基本的灰度变换函数

- 3 幂律变换

- 用于获取、打印和显示图像的许多设备的响应遵守幂律
- 伽马校正：校正幂律响应现象

在将图像输入显示器之前，使用变换 $s = r^{0.4}$ 预处理图像，得到的结果将产生外观上接近原图像的输出。

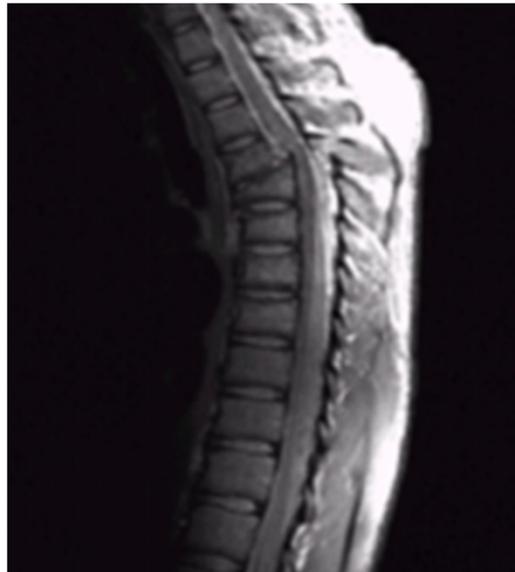




3.2 一些基本的灰度变换函数

- 3 幂律变换

- ▶ 使用幂律灰度变换增强图像对比度
选择 $c=1$, $\gamma = 0.6, 0.4, 0.3$



3.2 一些基本的灰度变换函数

- 3 幂律变换

- ▶ 使用幂律灰度变换增强图像对比度

选择 $c=1$, $\gamma = 3, 4, 5$



3.2 一些基本的灰度变换函数

- 4 分段线性变换函数

与前述三种变换互补；形式可以任意复杂；需要用
户输入很多参数

- 对比度拉伸

- 光照不足、成像设备动态范围小、设置错误等
- 对比度拉伸可以扩展图像灰度级范围，使其覆盖
记录介质或显示设备的整个理想灰度范围



3.2 一些基本的灰度变换函数

- 4 分段线性变换函数

- 当令

$$(r_1, s_1) = (r_{\min}, 0),$$

$$(r_2, s_2) = (r_{\max}, L-1) \text{ 时}$$

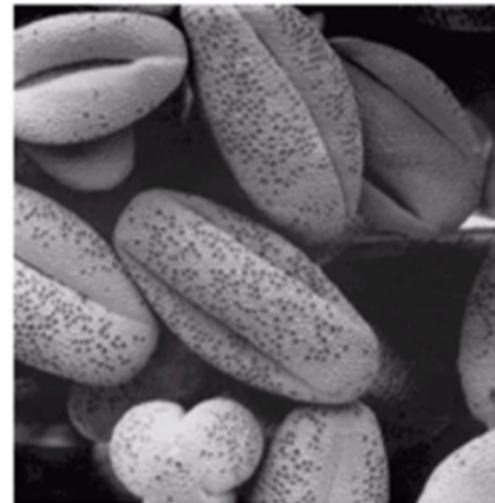
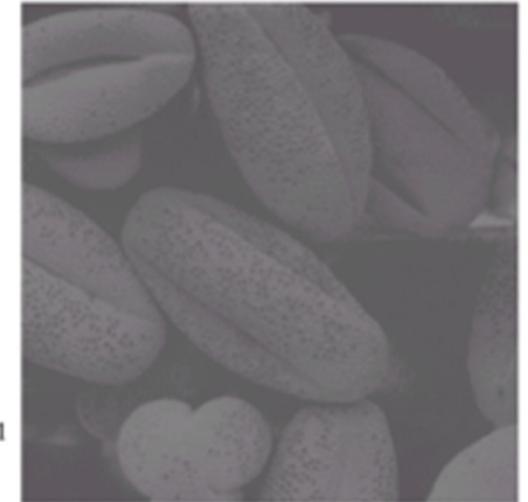
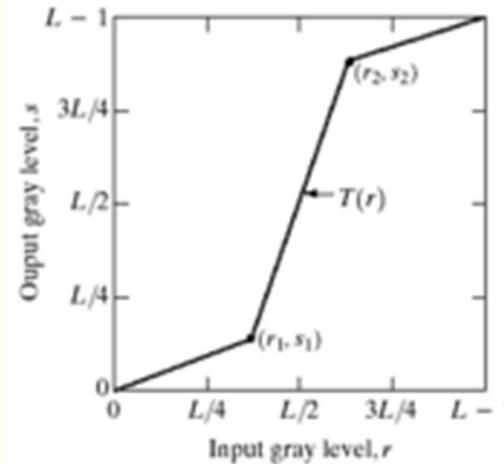
实现对图像的对比度拉伸，
可以看到，图像灰度级被
拉伸到了整个灰度区间
[0, L-1]

- 当令

$$(r_1, s_1) = (m, 0),$$

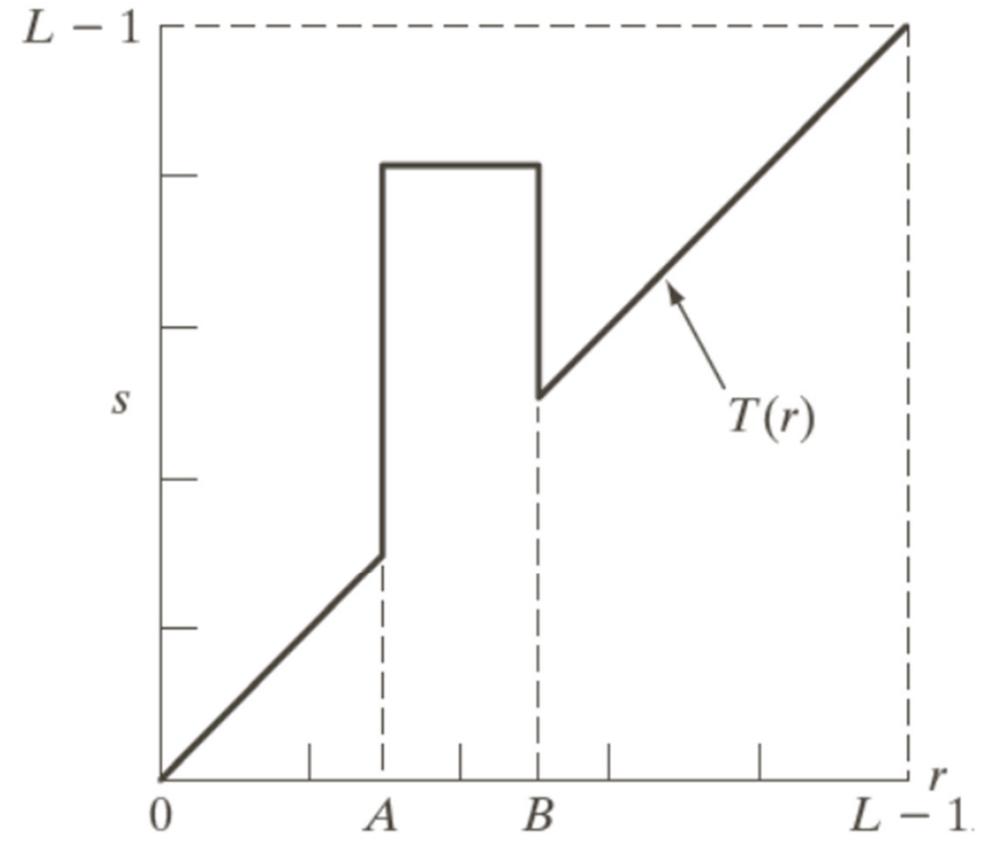
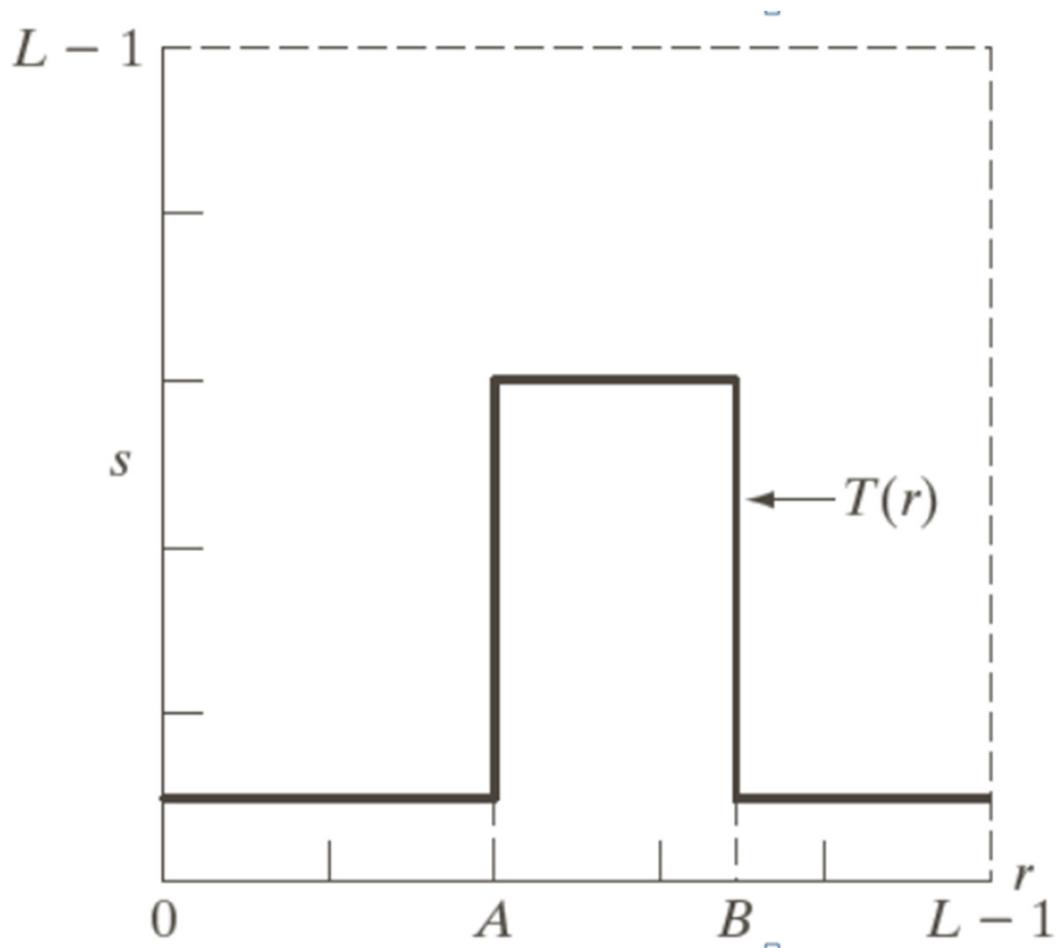
$$(r_2, s_2) = (m, L-1) \text{ 时}$$

实现阈值化处理



3.2 一些基本的灰度变换函数

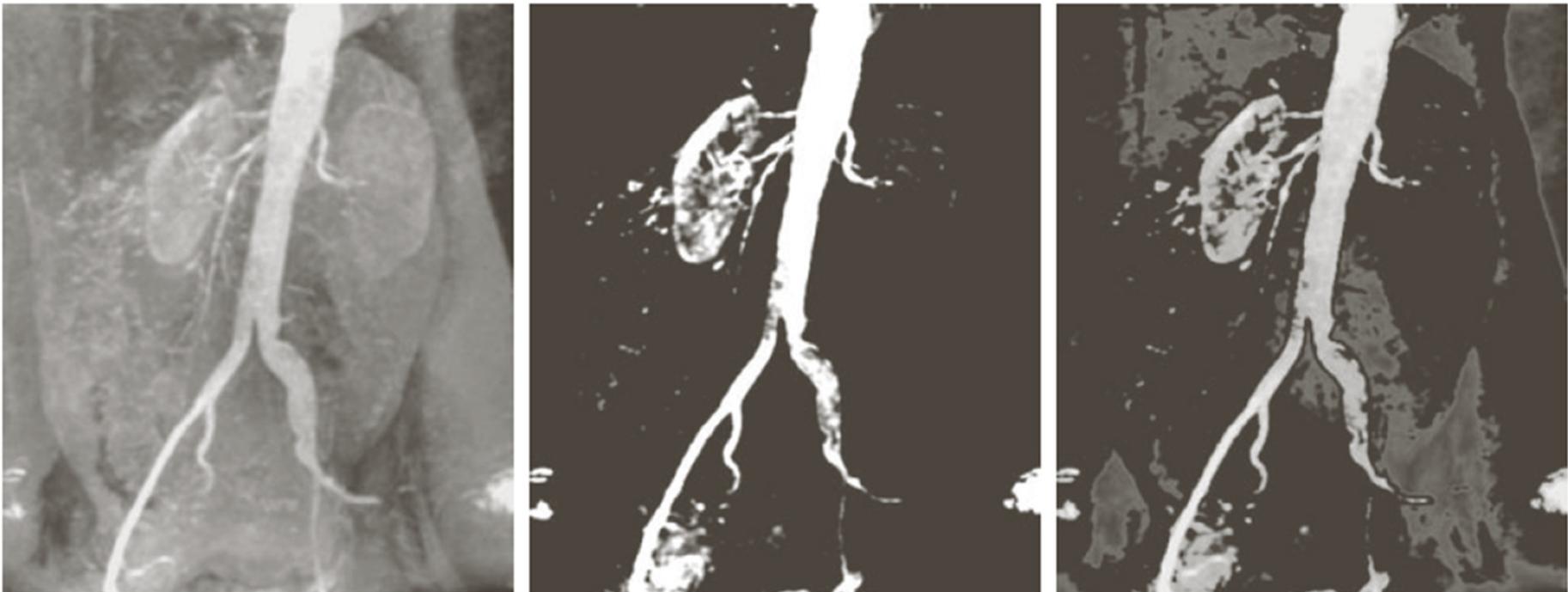
- 4 分段线性变换函数
 - 灰度级分层
 - 凸出图像中的特定灰度区间
 - 增强卫星图像中的特征（如水体）、X射线图像中缺陷等
 - 两种方法实现：
 - ✓ 期望范围指定较高值，其它范围指定较低值
 - ✓ 期望灰度范围指定较高值，其他灰度级不变





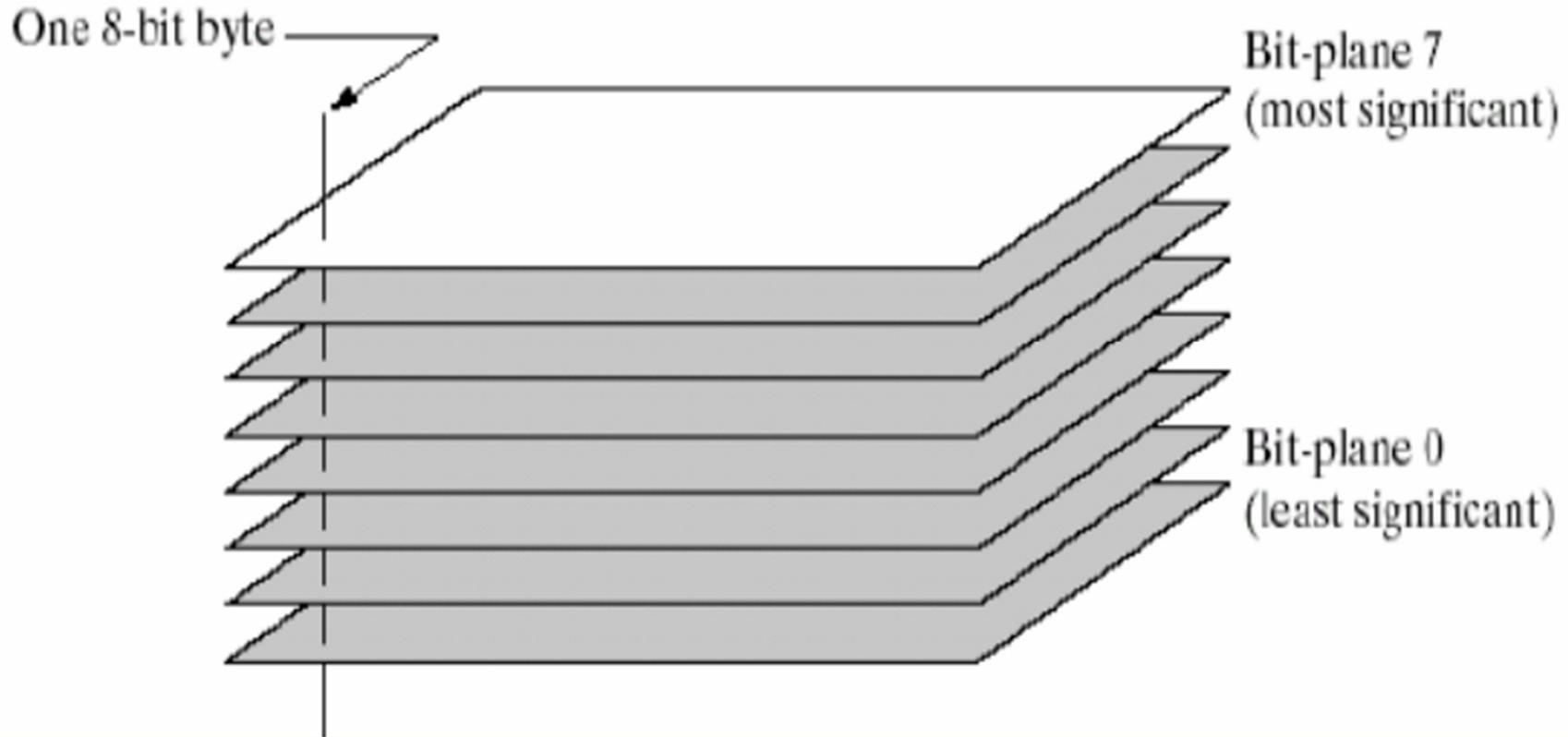
3.2 一些基本的灰度变换函数

- 4 分段线性变换函数
 - 灰度级分层
 - 用灰度级分层技术来增强比背景更亮的主要血管



3.2 一些基本的灰度变换函数

- 4 分段线性变换函数
 - 比特平面分层
 - 突出特定比特对整个图像外观的贡献
 - 图像灰度级是256，则8比特图像可视作由8个1比特平面组成，其中平面1包含图像中所有像素的最低有效比特，而平面8包含所有像素的最高有效比特





3.2 一些基本的灰度变换函数

- 4 分段线性变换函数

- 比特平面分层

- 作用:

- ✓ 提高特定位亮度，改善图像质量
- ✓ 较高位（前四位）包含大多数视觉重要数据
- ✓ 较低位（后四位）对图像中的微小细节有作用
- ✓ 分解为位平面，可以分析每比特的相对重要性

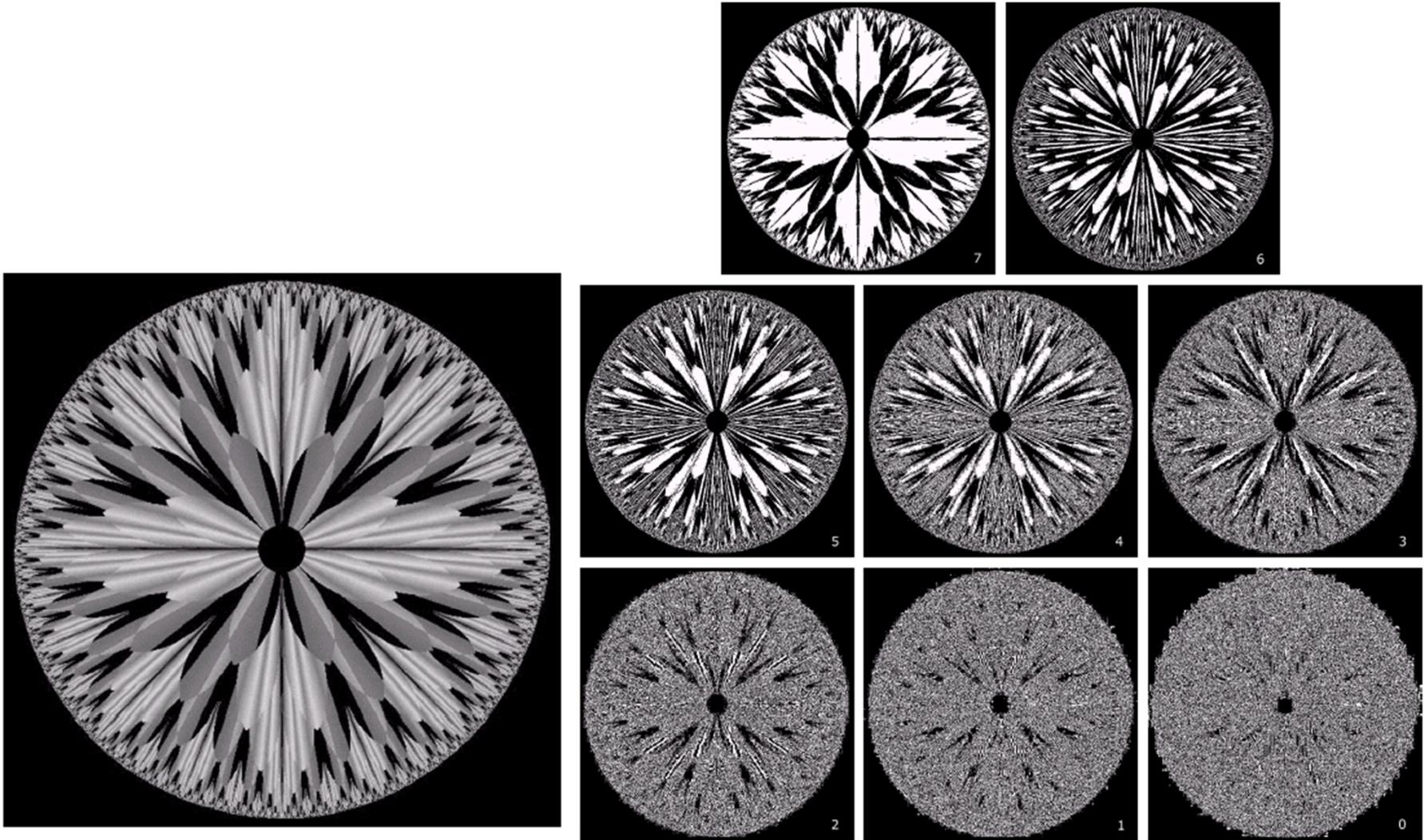


FIGURE 3.13 An 8-bit fractal image. (A fractal is an image generated from recursive expressions). (Courtesy of Ms. Melissa D. Binde, Swarthmore College, Swarthmore, MA)

FIGURE 3.14 The eight bit planes of the image in Fig. 3.13. The number at the bottom, right of each image identifies the bit plane.



3.3 直方图处理

- 令 $r_k, k = 1, 2, \dots, L-1$ 表示一幅 L 级灰度数字图像 $f(x, y)$ 的灰度。 f 的**非归一化直方图**定义为

$$h(r_k) = n_k \quad k = 0, 1, 2, \dots, L-1$$

n_k 是 f 中灰度为 r_k 的数量，并且细分的灰度级称为**直方图容器**。

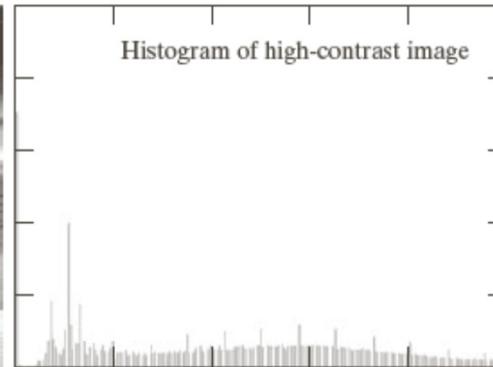
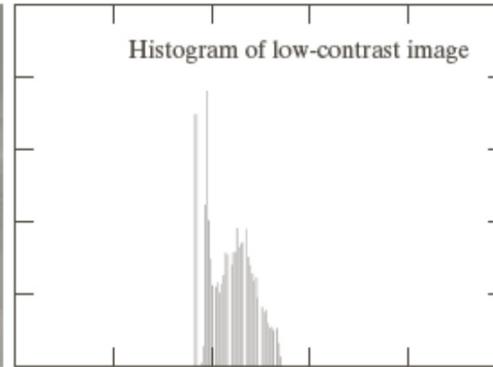
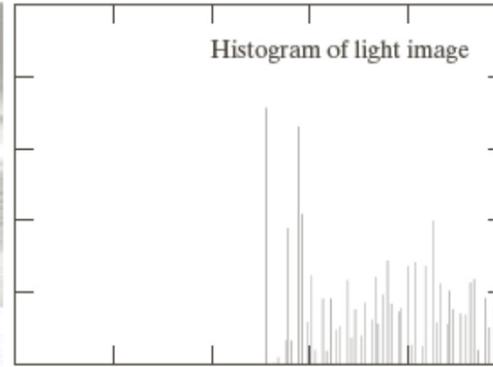
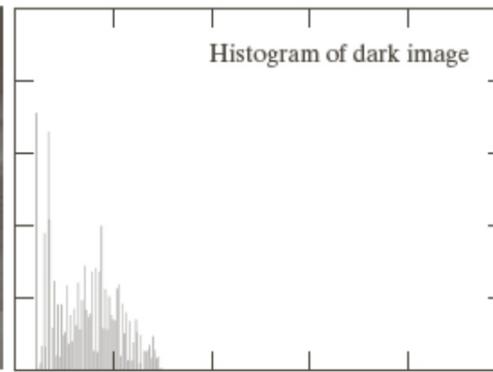
- 如此， f 的**归一化直方图**定义为

$$p(r_k) = \frac{h(r_k)}{MN} = \frac{n_k}{MN} \quad \sum_k p(r_k) = 1$$

此种直方图就是常采用的图像直方图

3.3 直方图处理

- 直方图形状与图像的外观有关
- ✓ 暗图像，大多数直方图容器集中在灰度级的低端
- ✓ 亮图像，大多数直方图容器集中在灰度级的高端
- ✓ 低对比度图像，直方图容器基本位于灰度级中间
- ✓ 高对比度图像，直方图容器覆盖较宽范围的灰度级，像素分布均匀，直方图容器高度基本相同



3.3 直方图处理

■ 3.3.1 直方图均衡化

直方图均衡化是将原图的直方图通过变换函数修整为均匀的直方图,然后按均衡直方图修整原图像。一幅给定图像的灰度级分布在 $0 \leq r \leq L-1$ 范围内。可以对 $[0, L-1]$ 区间内的任一个 r 值进行如下变换:

$$s=T(r)$$

也就是说,通过上述变换,每个原始图像的像素灰度值 r 都对应产生一个 s 值。变换函数 $T(r)$ 应满足下列条件:

- (1) 在 $0 \leq r \leq 1$ 区间内, $T(r)$ 值单调增加(严格单调);
- (2) 对于 $0 \leq r \leq 1$, 有 $0 \leq T(r) \leq 1$ 。

反变换关系 $r=T^{-1}(s)$ 对 S 满足同样上述条件

3.3 直方图处理

3.3.1 直方图均衡化

- ✓ 第一个条件保证了图像的灰度级从白到黑的次序不变
- ✓ 第二个条件则保证了映射变换后的像素灰度值在通输入图像的灰度范围相同

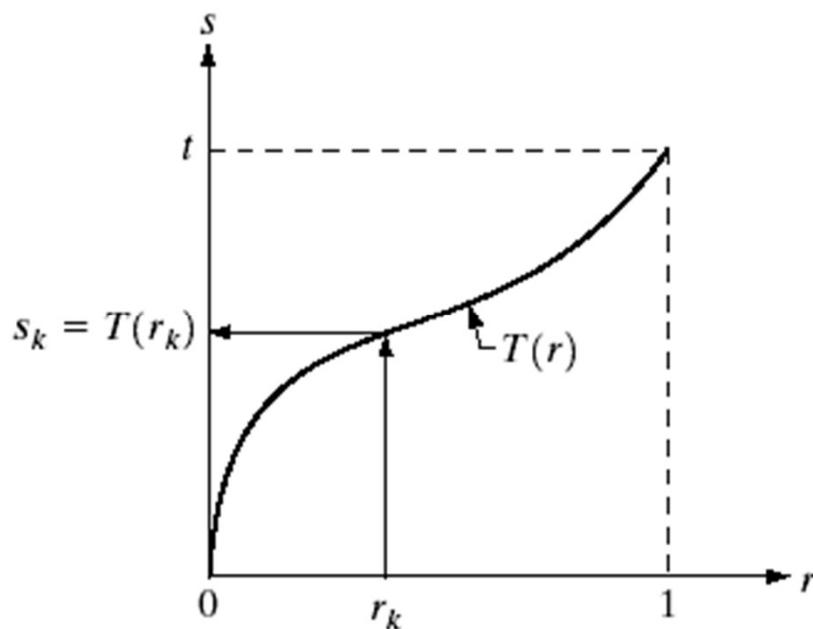


FIGURE 3.16 A gray-level transformation function that is both single valued and monotonically increasing.



3.3 直方图处理

■ 3.3.1 直方图均衡化

- 由概率论理论可知，如果已知随机变量 r 的概率密度函数为 $p_r(r)$ ，而随机变量 s 是 r 的函数即 $s=T(r)$ ， s 的概率密度为 $p_s(s)$ ，所以可由

$p_r(r)$ 求出 $p_s(s)$

$$p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right|$$

- 图像处理中另一个重要变换

$$s = T(r) = (L-1) \int_0^r p_r(w) dw$$

w 是假积分变量，右侧积分是随机变量 r 的累积分布函数，该式满足前述两个条件。该式子表明变换函数是原图像的累积分布函数



3.3 直方图处理

■ 3.3.1 直方图均衡化

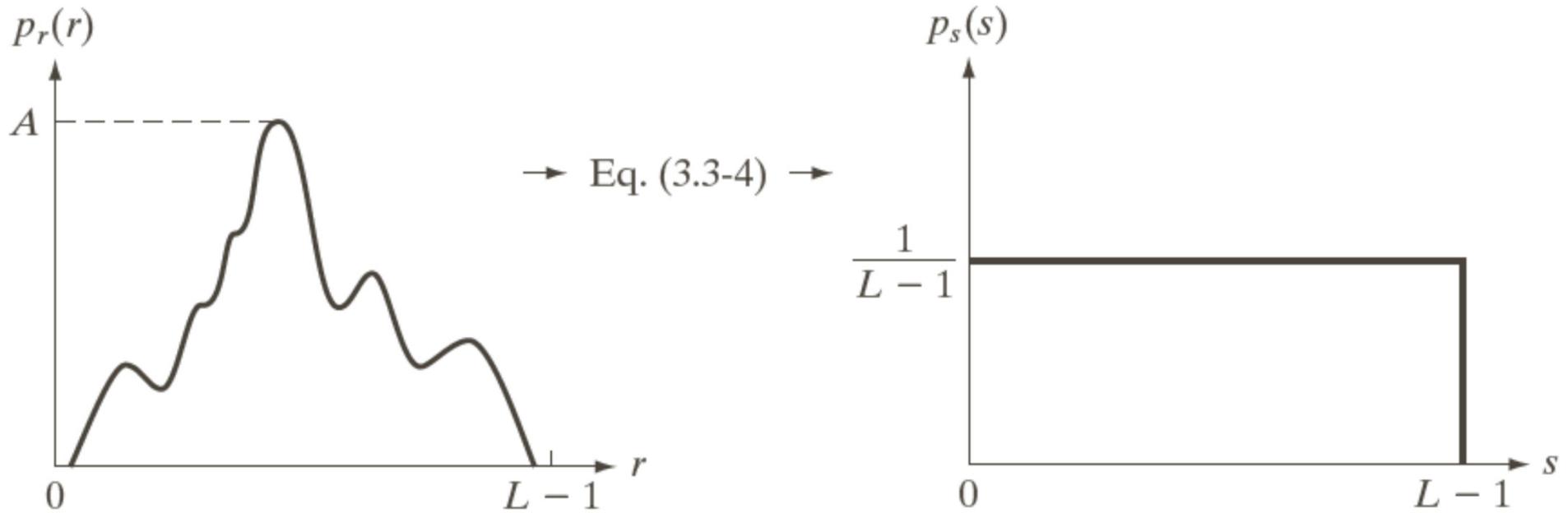
将前述两个式子结合：

1) 求取
$$\frac{ds}{dr} = \frac{dT(r)}{dr} = (L-1) \frac{d}{dr} \left[\int_0^r p_r(w) dw \right] = (L-1) p_r(r)$$

2) 带入

$$p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| = p_r(r) \left| \frac{1}{(L-1)p_r(r)} \right| = \frac{1}{L-1}$$

由此看出 $p_s(s)$ 是一个均匀概率密度函数。因此，经过 $T(r)$ 变换之后产生的随机变量 s ，是由PDF表征的。



a b

FIGURE 3.18 (a) An arbitrary PDF. (b) Result of applying the transformation in Eq. (3.3-4) to all intensity levels, r . The resulting intensities, s , have a uniform PDF, independently of the form of the PDF of the r 's.

3.3 直方图处理

■ 3.3.1 直方图均衡化

- 扩展到离散图像，出现灰度级 r_k 的概率近似为

$$p(r_k) = \frac{n_k}{MN}$$

上式称为归一化图像直方图

- $s_k = T(r_k) = (L-1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j), k = 0, 1, \dots, L-1$

借助上式，实现将输入图像中灰度级为 r_k 的每个像素映射为输出图像中灰度级为 s_k 的对应像素，由此得到输出图像。这称为直方图均衡化



3.3 直方图处理

3.3.1 直方图均衡化

- 例子：令图像大小为 64×64 像素， $L=8$ ，其图像灰度分布表如下

r_k	n_k	$p_r(r_k) = n_k/MN$
$r_0 = 0$	790	0.19
$r_1 = 1$	1023	0.25
$r_2 = 2$	850	0.21
$r_3 = 3$	656	0.16
$r_4 = 4$	329	0.08
$r_5 = 5$	245	0.06
$r_6 = 6$	122	0.03
$r_7 = 7$	81	0.02

3.3 直方图处理

■ 3.3.1 直方图均衡化

➤ 例子：令图像大小为 64×64 像素， $L=8$

根据前面的公式计算其变换后的 s_k

$$s_0 = T(r_0) = 7 \sum_{j=0}^0 P_r(r_j) = 7P_r(r_0) = 1.33$$

$$s_4 = 6.23$$

$$s_1 = T(r_1) = 7 \sum_{j=0}^1 P_r(r_j) = 7[P_r(r_0) + P_r(r_1)] = 3.08$$

$$s_5 = 6.65$$

$$s_2 = T(r_2) = 7 \sum_{j=0}^2 P_r(r_j) = 7[P_r(r_0) + P_r(r_1) + P_r(r_2)] = 4.55$$

$$s_6 = 6.86$$

$$s_3 = T(r_3) = 7 \sum_{j=0}^3 P_r(r_j) = 7[P_r(r_0) + P_r(r_1) + P_r(r_2) + P_r(r_3)] = 5.67$$

$$s_7 = 7$$



3.3 直方图处理

3.3.1 直方图均衡化

➤ 例子：令图像大小为 64×64 像素， $L=8$

✓ 量化 s_k

$s_0 = 1.33 \rightarrow 1$	$s_4 = 6.23 \rightarrow 6$
$s_1 = 3.08 \rightarrow 3$	$s_5 = 6.65 \rightarrow 7$
$s_2 = 4.55 \rightarrow 5$	$s_6 = 6.86 \rightarrow 7$
$s_3 = 5.67 \rightarrow 6$	$s_7 = 7.00 \rightarrow 7$

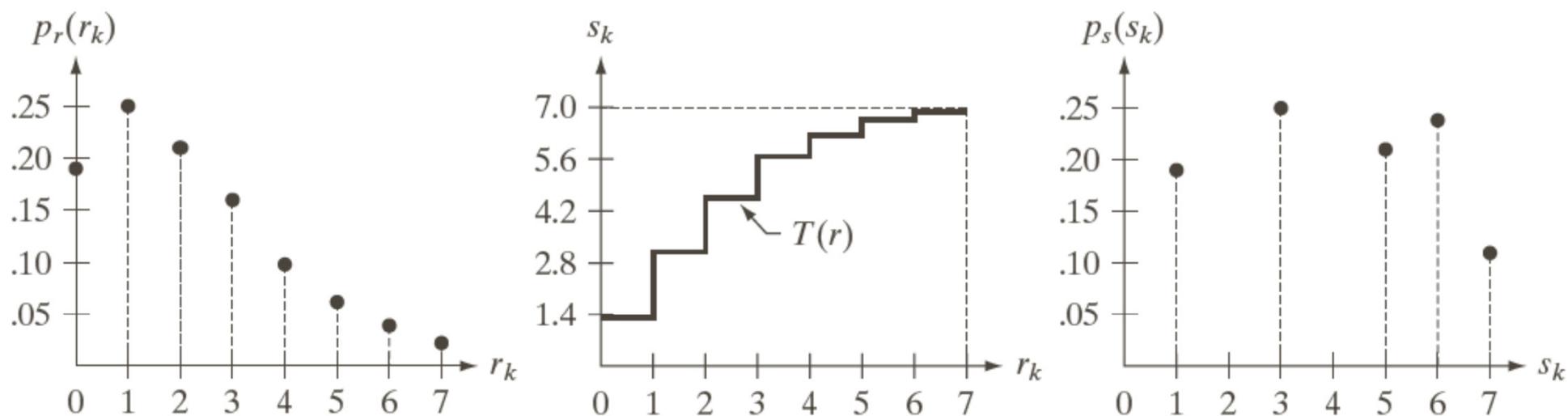
✓ 由此得到5个灰度级 $s'_0 = 1$ $s'_1 = 3$ $s'_2 = 5$ $s'_3 = 6$ $s'_4 = 7$

✓ 对应概率密度 $p_s(s)$ 为 $\frac{790}{4096}, \frac{1023}{4096}, \frac{850}{4096}, \frac{985}{4096}, \frac{448}{4096}$

3.3 直方图处理

3.3.1 直方图均衡化

例子：令图像大小为 64×64 像素， $L=8$

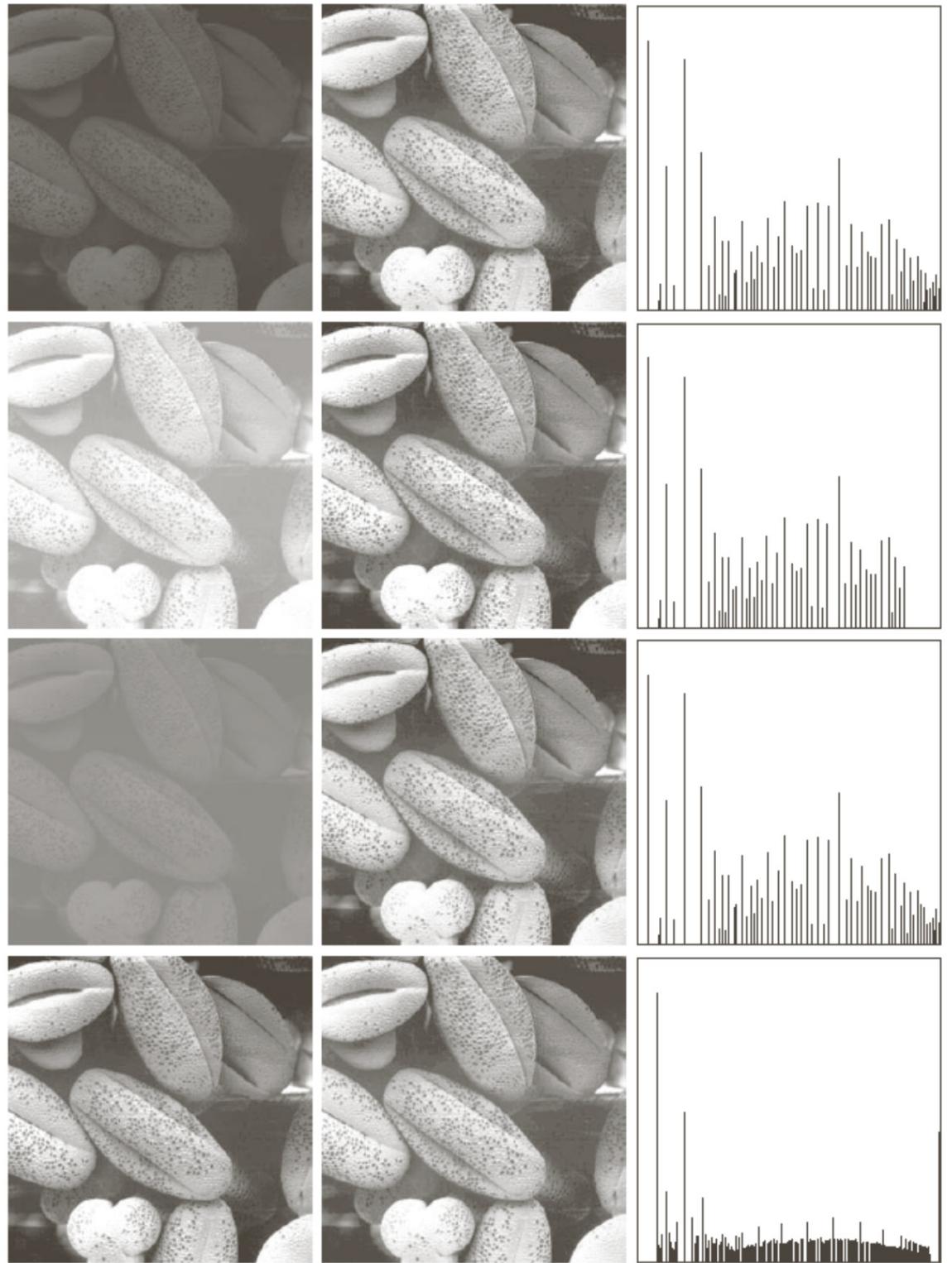
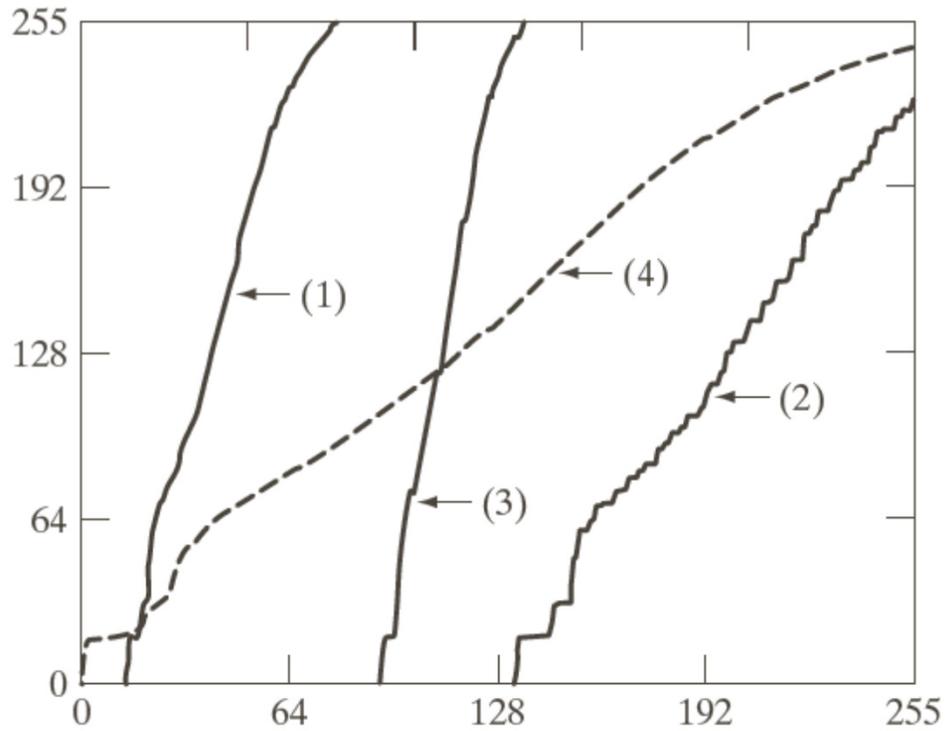


a b c

FIGURE 3.19 Illustration of histogram equalization of a 3-bit (8 intensity levels) image. (a) Original histogram. (b) Transformation function. (c) Equalized histogram.



直方图均衡化有助于提升图像对比度





3.3 直方图处理

■ 3.3.2 直方图匹配（规定化）

有时人们希望增强后的图像,其灰度级的分布不是均匀的,而是具有规定形状的直方图,这样可突出感兴趣的灰度范围

- 考虑连续灰度 r 和 z , 对应的PDF分别为 $p_r(r)$ 和 $p_z(z)$ 。其中, r 和 z 分别表示输入图像和输出图像的灰度级。

$$s = T(r) = (L-1) \int_0^r p_r(w) dw$$

$$G(z) = (L-1) \int_0^z p_z(v) dv$$

$$\text{令 } G(z) = s = T(r) \quad \rightarrow \quad z = G^{-1}(s) = G^{-1}[T(r)]$$

3.3 直方图处理

■ 3.3.2 直方图匹配（规定化）

使用如下步骤可以得到一幅灰度级具有规定PDF的图像

- 1 由输入图像获取 $p_r(r)$
- 2 由规定的 $p_z(z)$ 得到 $G(z)$
- 3 计算反变换 $z = G^{-1}(s)$ ，这是从s到z的映射
- 4 使用 $s = T(r)$ 进行直方图均衡化，然后对均衡图像中每个像素执行 $z = G^{-1}(s)$ ，得到输出图像中的对应像素。

由此，可以得到具有规定PDF的图像



3.3 直方图处理

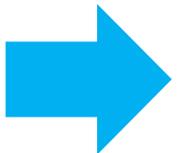
■ 3.3.2 直方图匹配（规定化）

推广至离散情况

$$s_k = T(r_k) = (L-1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j), k = 0, 1, \dots, L-1$$

➤ 对一个q值计算变换函数 $G(z_q) = (L-1) \sum_{i=0}^q p_z(z_i)$

➤ 以便有 $G(z_q) = s_k$



$$z_q = G^{-1}(s_k)$$

上述是从直方图均衡化后的图像中的s值到输出图像中对应z值的一个映射



3.3 直方图处理

$$G(z_q) = S_k$$

3.3.2 直方图匹配（规定化）

给定输入图像和规定直方图 $p_z(z_i)$, $i=0,1,2,\dots,L-1$, s_k 是直方图均衡结果

- 1 由输入图像获取 $p_r(r)$, 由此推知直方图均衡化后的图像中的灰度, 将得到的 s_k 四舍五入
- 2 由 $p_z(z_i)$ 得到 $G(z_q)$, 并将其四舍五入至 $[0,L-1]$, 生成查找表
- 3 对于 s_k , 由存储的 G 值找到对应的 z_q , 使得存在多个 s 到 z 的映射, 取最小的值
- 4 使用上述映射, 将均衡化后的像素 s_k 映射到直方图规定化图像中值为 z_q 的对应像素, 形成直方图规定化后的图像

3.3 直方图处理

■ 3.3.2 直方图匹配（规定化）

例子令图像大小为 64×64 像素， $L=8$

z_q	Specified $p_z(z_q)$	Actual $p_z(z_k)$
$z_0 = 0$	0.00	0.00
$z_1 = 1$	0.00	0.00
$z_2 = 2$	0.00	0.00
$z_3 = 3$	0.15	0.19
$z_4 = 4$	0.20	0.25
$z_5 = 5$	0.30	0.21
$z_6 = 6$	0.20	0.24
$z_7 = 7$	0.15	0.11

3.3 直方图处理

■ 3.3.2 直方图匹配（规定化）

例子令图像大小为 64×64 像素， $L=8$

$$s_0 = 1, s_1 = 3, s_2 = 5, s_3 = 6$$

$$s_4 = 6, s_5 = 7, s_6 = 7, s_7 = 7$$

$$G(z_0) = 0.00 \rightarrow 0 \quad G(z_4) = 2.45 \rightarrow 2$$

$$G(z_1) = 0.00 \rightarrow 0 \quad G(z_5) = 4.55 \rightarrow 5$$

$$G(z_2) = 0.00 \rightarrow 0 \quad G(z_6) = 5.95 \rightarrow 6$$

$$G(z_3) = 1.05 \rightarrow 1 \quad G(z_7) = 7.00 \rightarrow 7$$

z_q	$G(z_q)$
$z_0 = 0$	0
$z_1 = 1$	0
$z_2 = 2$	0
$z_3 = 3$	1
$z_4 = 4$	2
$z_5 = 5$	5
$z_6 = 6$	6
$z_7 = 7$	7



3.3 直方图处理

■ 3.3.2 直方图匹配（规定化）

例子令图像大小为 64×64 像素， $L=8$

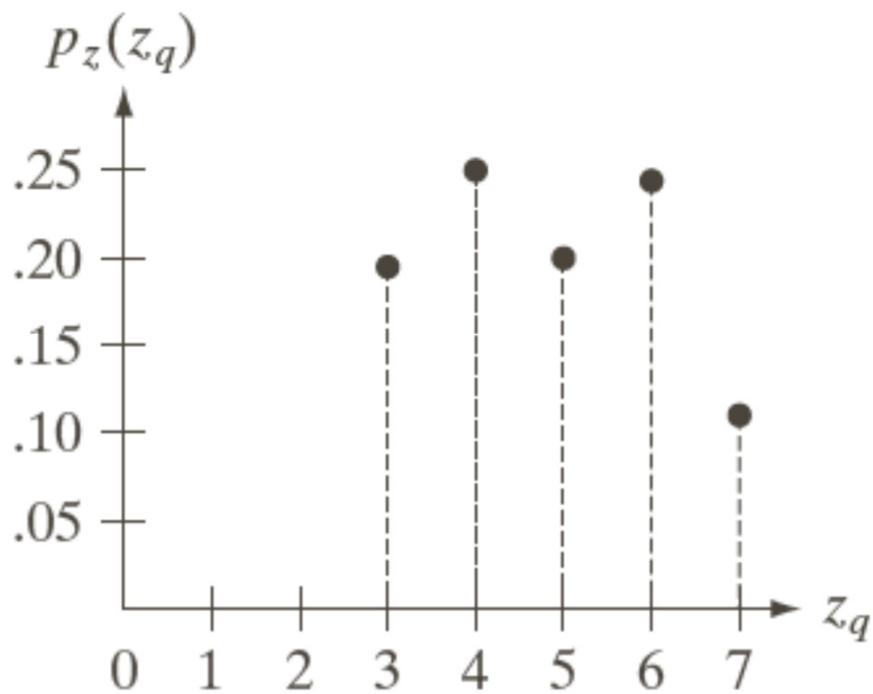
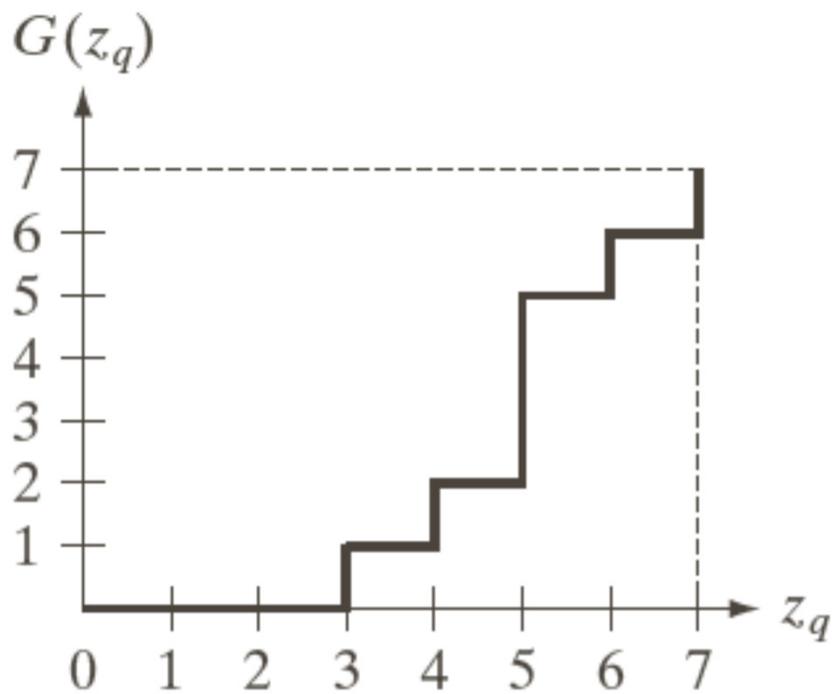
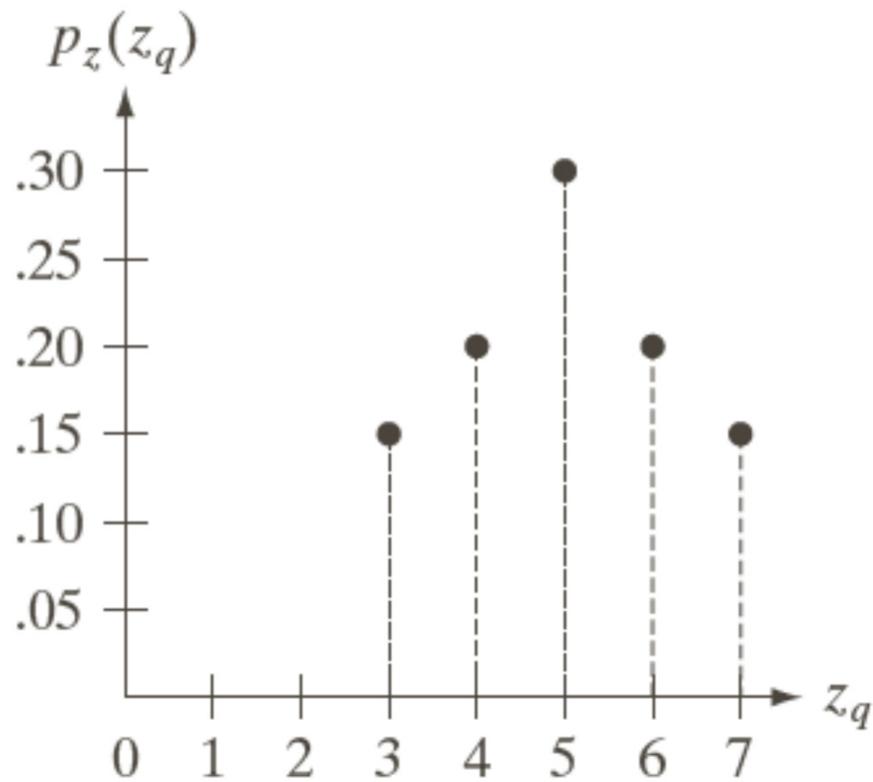
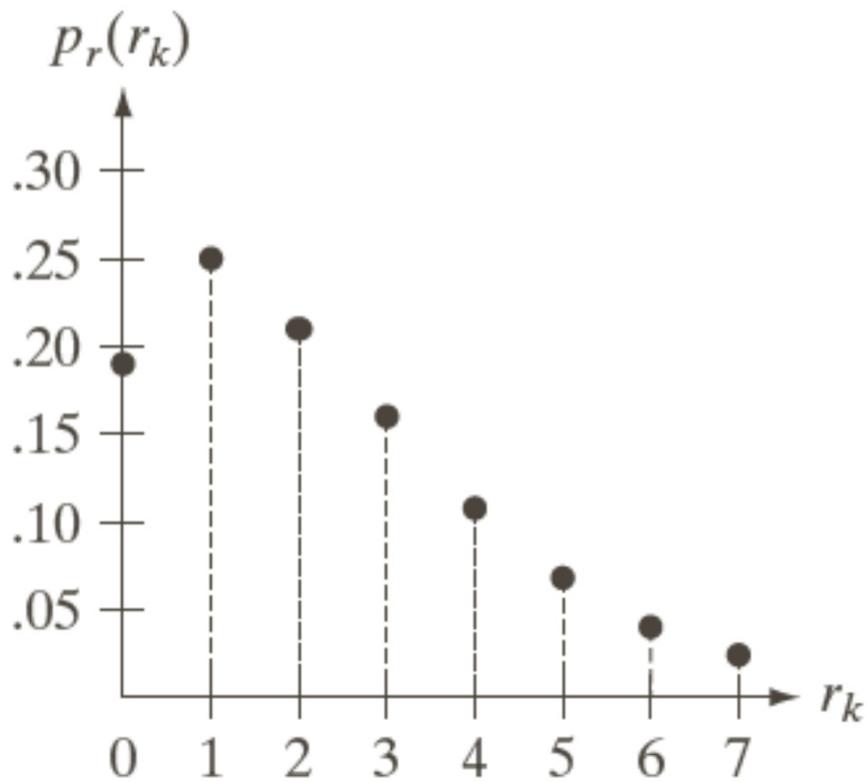
$$p_z(z_3)[s_0] = \frac{790}{4096}; p_z(z_4)[s_1] = \frac{1023}{4096}$$

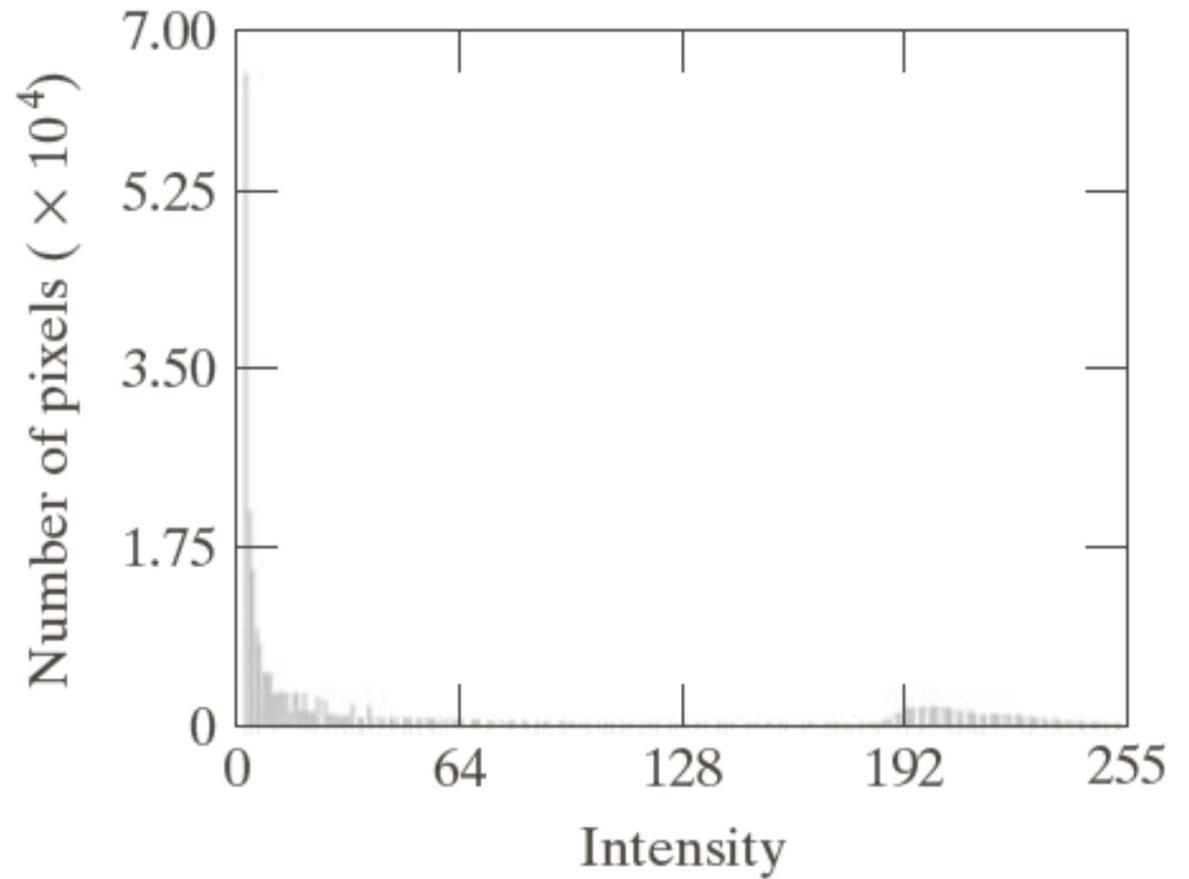
$$p_z(z_5)[s_2] = \frac{850}{4096}; p_z(z_6)[s_3, s_4] = \frac{985}{4096}$$

$$p_z(z_7)[s_5, s_6, s_7] = \frac{448}{4096}$$

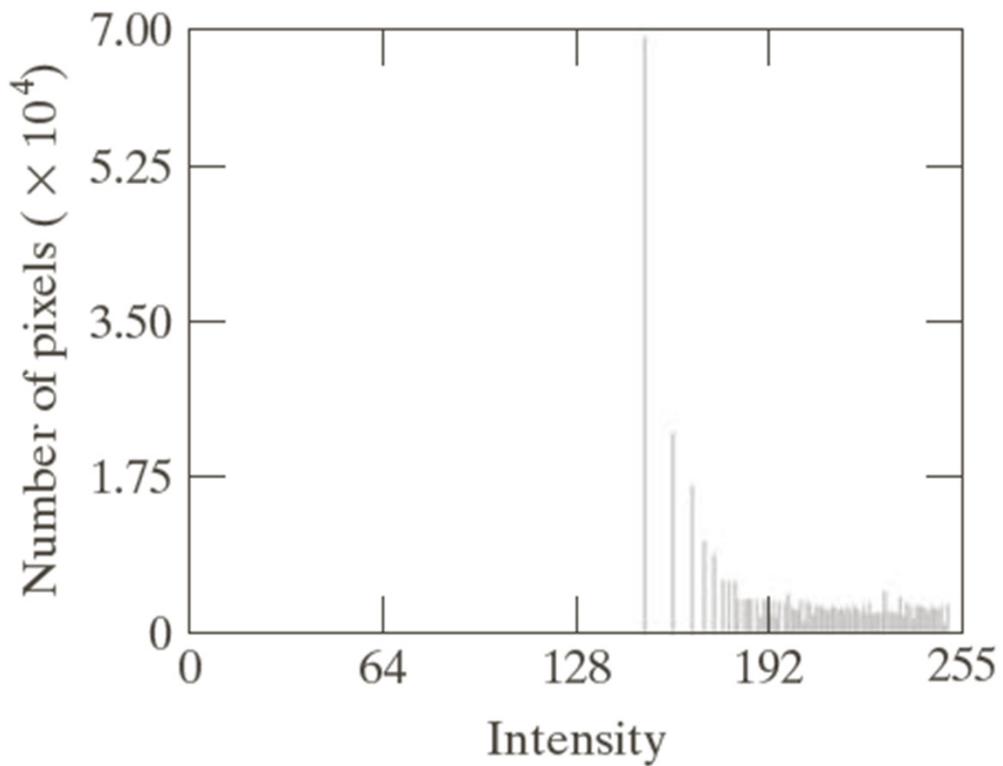
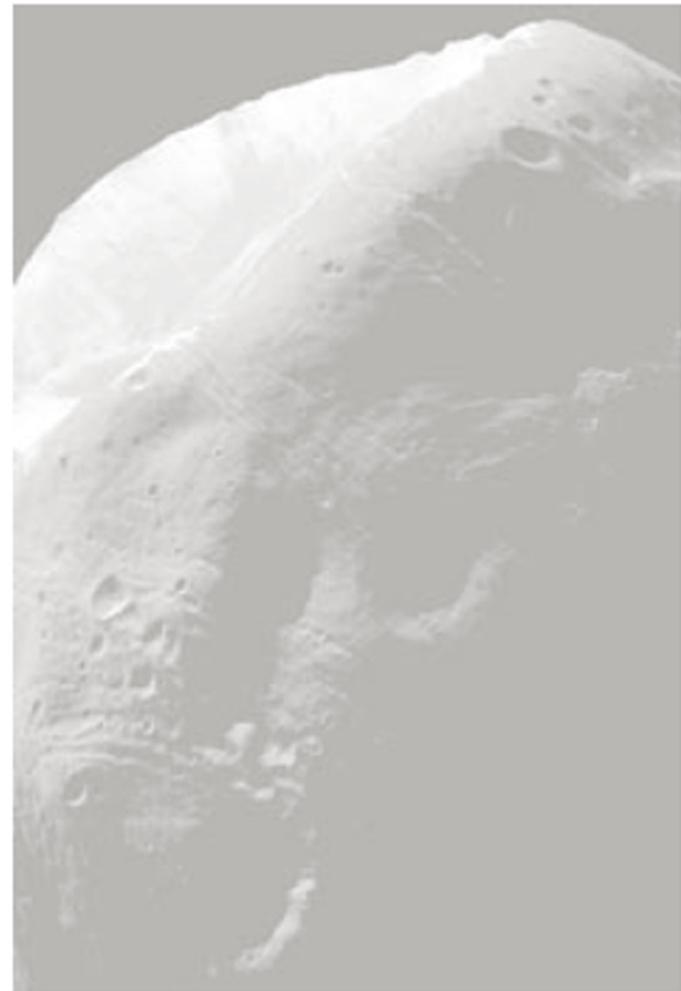
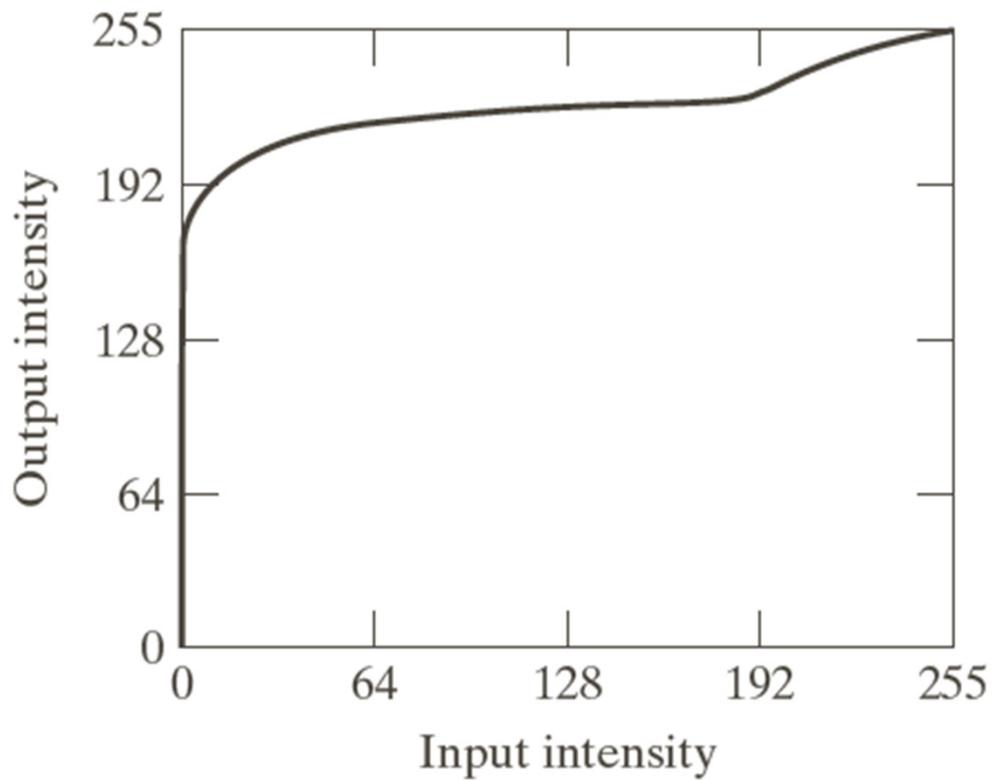
s_k	\rightarrow	z_q
1	\rightarrow	3
3	\rightarrow	4
5	\rightarrow	5
6	\rightarrow	6
7	\rightarrow	7

最终结果和规定直方图不完全匹配，但实现了将灰度向灰度级的高端移动的一般趋势



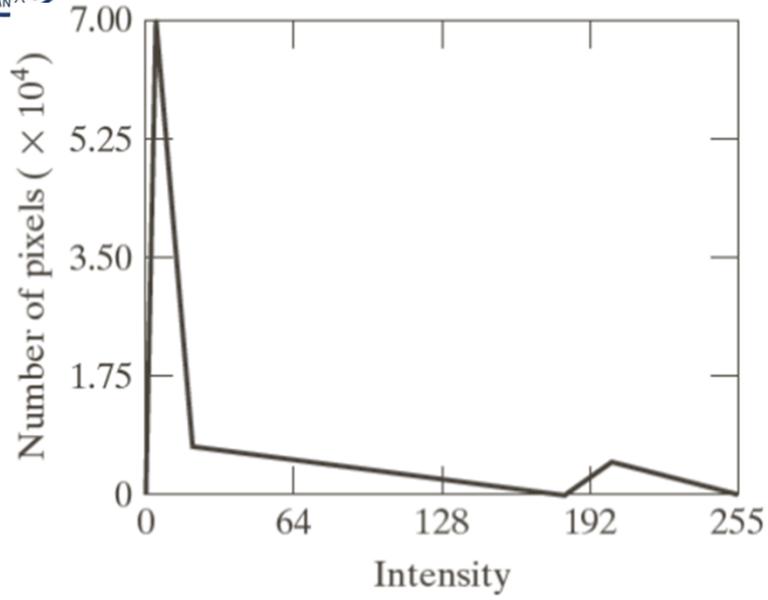


直方图均衡化

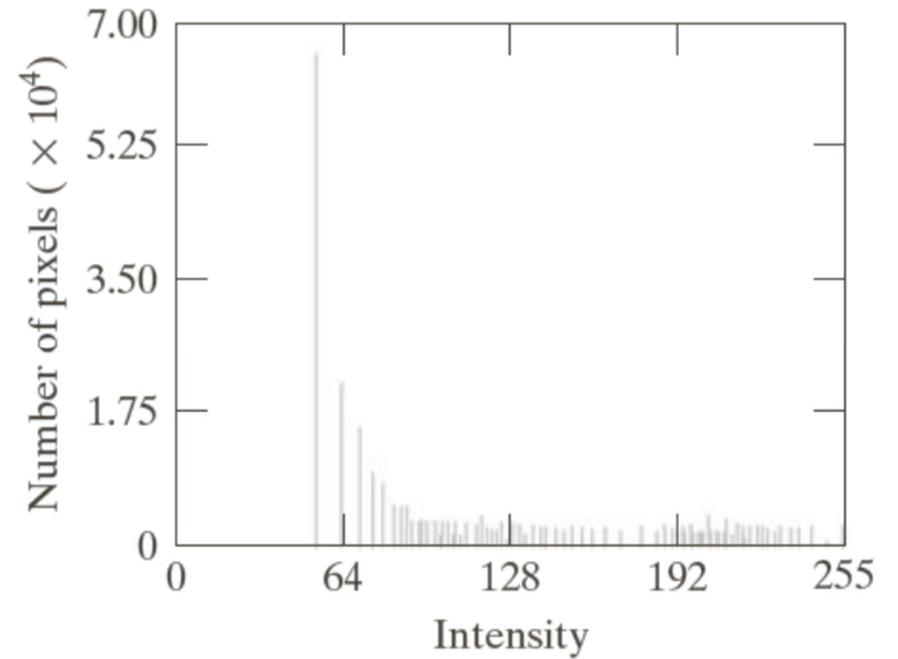
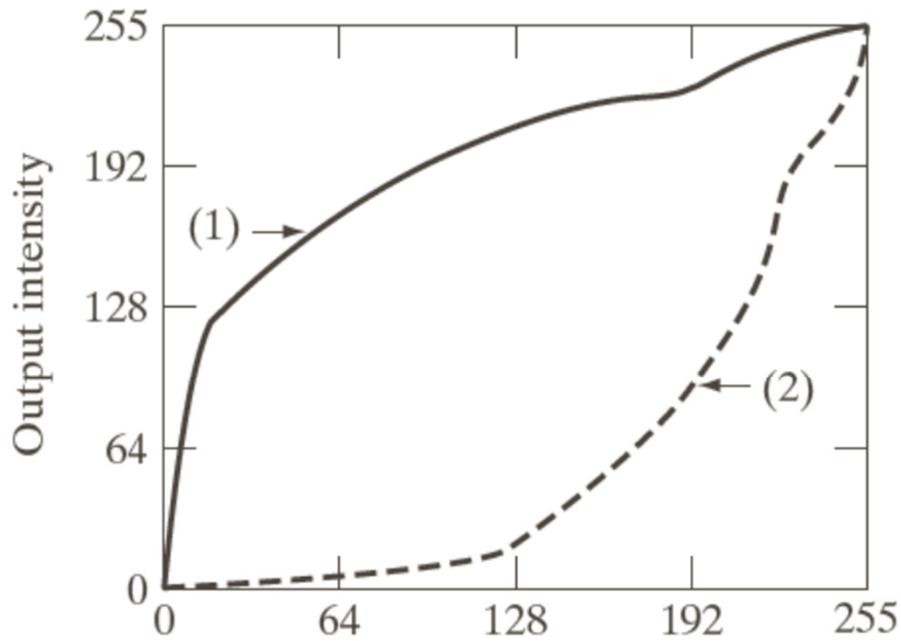




直方图匹配



Input intensity

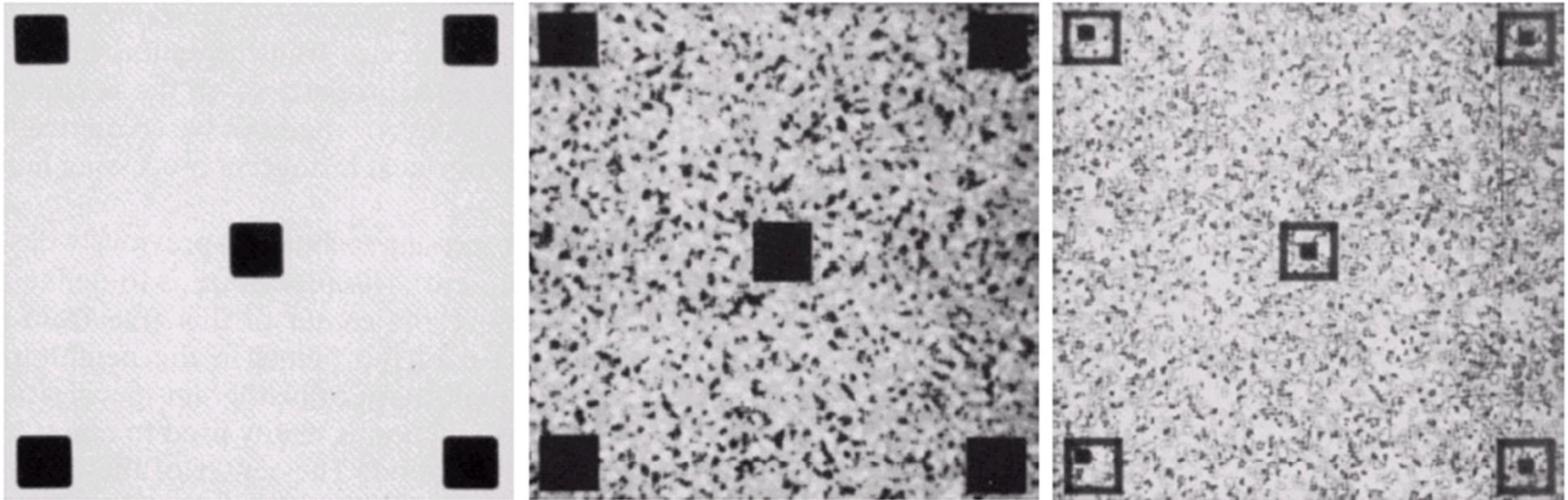




3.3 直方图处理

■ 3.3.3 局部直方图处理

- 直方图处理方法都是全局性的，因为像素是基于整个图像的灰度分布的变换函数修改的。
- 这种全局性方法适用于整体增强，担当目的是增强图像中的几个小区域的细节时，通常就会失败。
- 由此引出设计基于像素邻域的灰度分布的变换函数（用于映射邻域中心像素的灰度）
- 非重叠区域计算时，常常引起“块状效应”



a b c

FIGURE 3.23 (a) Original image. (b) Result of global histogram equalization. (c) Result of local histogram equalization using a 7×7 neighborhood about each pixel.

3.3 直方图处理

■ 3.3.4 使用直方图统计量增强图像

直接从图像直方图得到统计量信息可用于增强图像， $p(r_i)$ 是对应于灰度值 r_i 的归一化直方图分量

图像平均灰度 $m = \sum_{i=0}^{L-1} r_i p(r_i)$ 视作平均灰度的测度

图像方差 $\sigma^2(r) = \sum_i (r_i - m)^2 p(r_i)$ 视作图像对比度的测度



3.3 直方图处理

■ 3.3.4 使用直方图统计量增强图像

- 全局均值和方差对总体灰度和对比度的大致调整非常有用。
- 局部增强：局部均值和方差是根据图像内每个像素的邻域中的图像特征做出改变的基础
- 令 (x,y) 是给定图像中任意一个像素的坐标，令 S_{xy} 是以 (x,y) 为中心的一个规定大小的邻域。这个邻域像素均值和方差为

$$m_{S_{xy}} = \sum_{i=0}^{L-1} r_i p_{S_{xy}}(r_i) \quad \sigma_{S_{xy}}^2 = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - m_{S_{xy}})^2 p_{S_{xy}}(r_i)$$

$p_{S_{xy}}(r_i)$ 表示区域的直方图

- 局部均值和方差分别对应平均灰度和灰度对比度

3.3 直方图处理

■ 3.3.4 使用直方图统计量增强图像

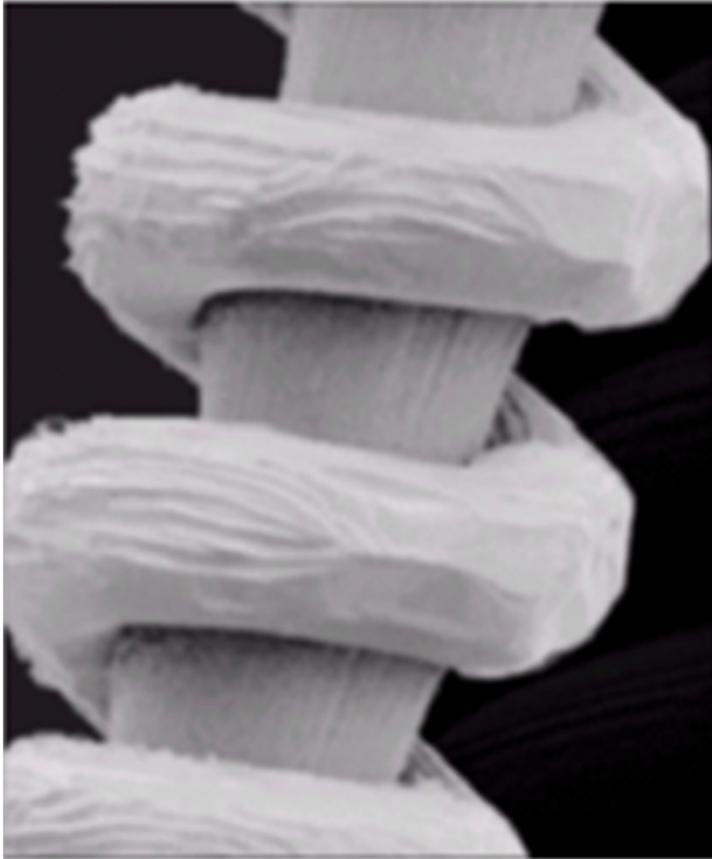
➤ 例 使用直方图统计量增强局部图像

$$g(x, y) = \begin{cases} Cf(x, y) & k_0 m_G \leq m_{S_{xy}} \leq k_1 m_G \ \& \ k_2 \sigma_G \leq \sigma_{S_{xy}} \leq k_3 \sigma_G \\ f(x, y) & \text{else} \end{cases}$$

m_G 和 $\sigma_{S_{xy}}$ 分别是图像整体均值和标准差

$m_{S_{xy}}$ 和 $\sigma_{S_{xy}}$ 分别是局部均值和标准差

用于增强图像亮度和对比度





3.4 空间滤波基础

- “滤波”指通过修改或抑制图像的规定频率分量
- 低通滤波器：通过低频的滤波器，其作用是通过模糊图像来平滑图像
- 空间滤波通过把每个像素的值替换为该像素及其邻域的函数值来修改图像。
- 如果对图像像素执行的运算是线性的，那么称该滤波器为**线性空间滤波器**。否则，称该滤波器为**非线性空间滤波器**

3.4 空间滤波基础

3.4.1 线性空间滤波原理

线性空间滤波器在图像 f 和滤波器核 w 之间进行乘积之和运算，具体地，用 3×3 核（模板或窗口）进行线性空间滤波的原理：

- 在图像中任意一点 (x,y) 处，滤波器的响应 $g(x,y)$ 是核系数和核所覆盖的图像像素之和

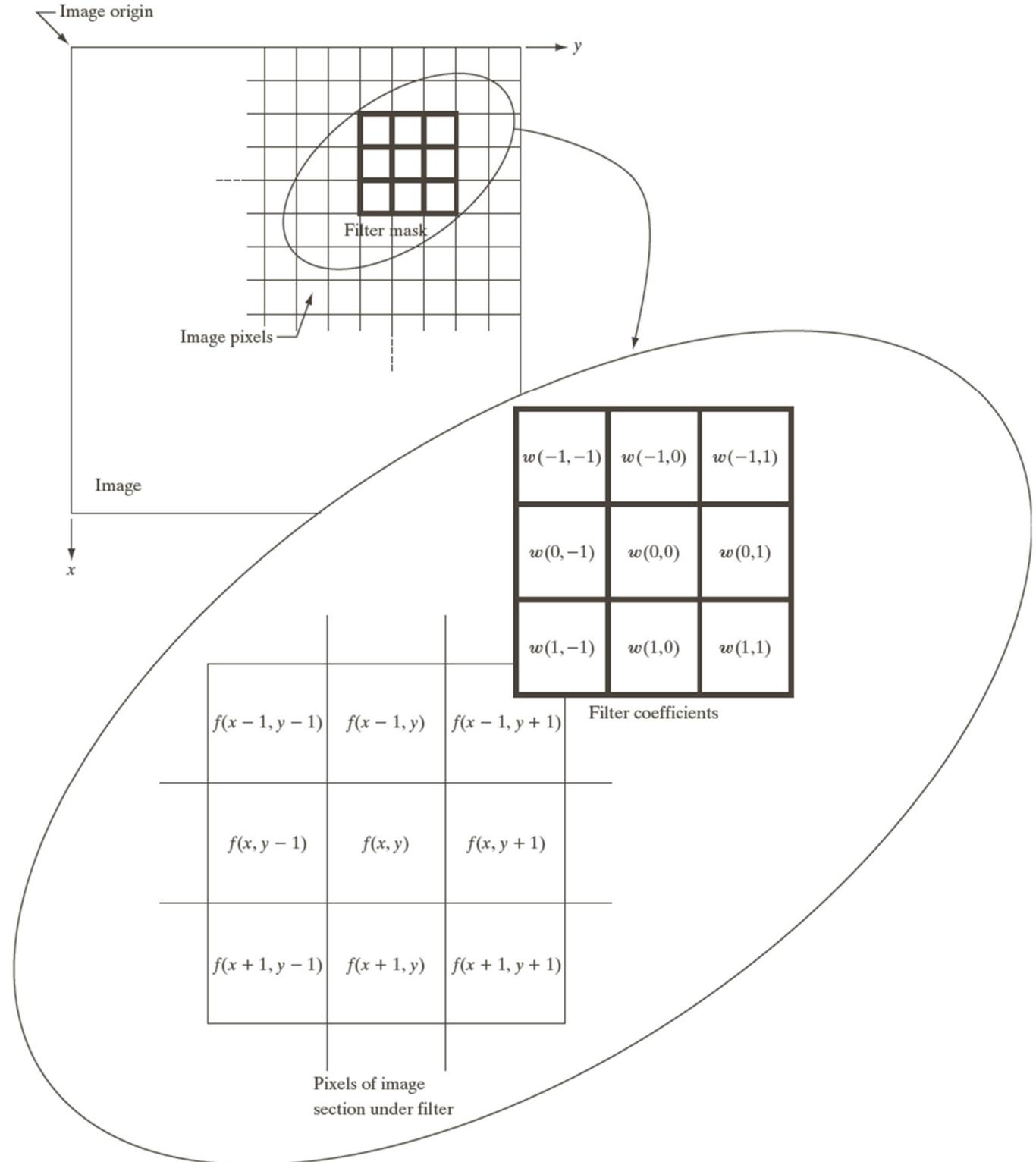
$$g(x, y) = w(-1, -1)f(x - 1, y - 1) + w(-1, 0)f(x - 1, y) + \dots \\ + w(0, 0)f(x, y) + \dots + w(1, 1)f(x + 1, y + 1)$$

坐标 (x,y) 变化时，核的中心逐像素移动，并在移动过程中生成滤波后的图像 g

- 大小为 $m \times n$ 的核对大小为 $M \times N$ 的图像的线性空间滤波可以表示为

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)$$

核大小为 $m \times n, m = 2a + 1, n = 2b + 1$





3.4 空间滤波基础

3.4.2 空间相关与卷积

- **相关**的运算过程如下：在图像上移动核的中心，并且在每个位置计算乘积之和。
- **空间卷积**则是（在执行移位/乘积之和前）把相关运算的核旋转了 180° 。
- 核的值关于中心对称时，相关和卷积的得到的结果相同

相关

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)$$

卷积

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x - s, y - t)$$



3.4 空间滤波基础

3.4.4 空间域滤波和频率域滤波的一些重要比较

- **可分离**：二维函数可分解为两个一维函数的乘积，即

$$G(x, y) = G_1(x)G_2(y)$$

- **可分离核**可以表示为一个列向量和一个行向量的乘积（外积），即为这两个向量的二维卷积（矩阵的秩为1）

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}\mathbf{V}^T$$

- 对于大小适中的核，可分离操作可提高计算效率



3.4 空间滤波基础

3.4.4 空间域滤波和频率域滤波的一些重要比较

- 空间域处理和频率域处理之间的联系纽带是傅里叶变换
- 线性滤波就是找到合适的方法来修改图像的频率内容
 - ✓ 空间域通过卷积滤波来实现
 - ✓ 频率域则是通过乘法滤波器实现



3.5 平滑（低通）空间滤波器

- 平滑（平均）空间滤波器用于降低灰度的急剧过渡。
 - ✓ 降噪，减少混淆、无关细节
 - ✓ 平滑伪轮廓
- 线性空间滤波器是指图像与滤波器核进行卷积
 - ✓ 平滑核与图像卷积会模糊图像，模糊程度取决于核的大小和其系数的值
 - ✓ 低通滤波器是其它滤波器如高通、带通和带阻滤波器的基础
 - ✓ 主要包括可分离盒式核和高斯核滤波器



3.5 平滑（低通）

3.5.1 盒式滤波器核

- 系数值相同（通常为1），前面有一个归一化常数（1除以系数值之和）

- ✓ 原图像和滤波后图像像素和相同

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1^* & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{9} \times$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

$$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1^* & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

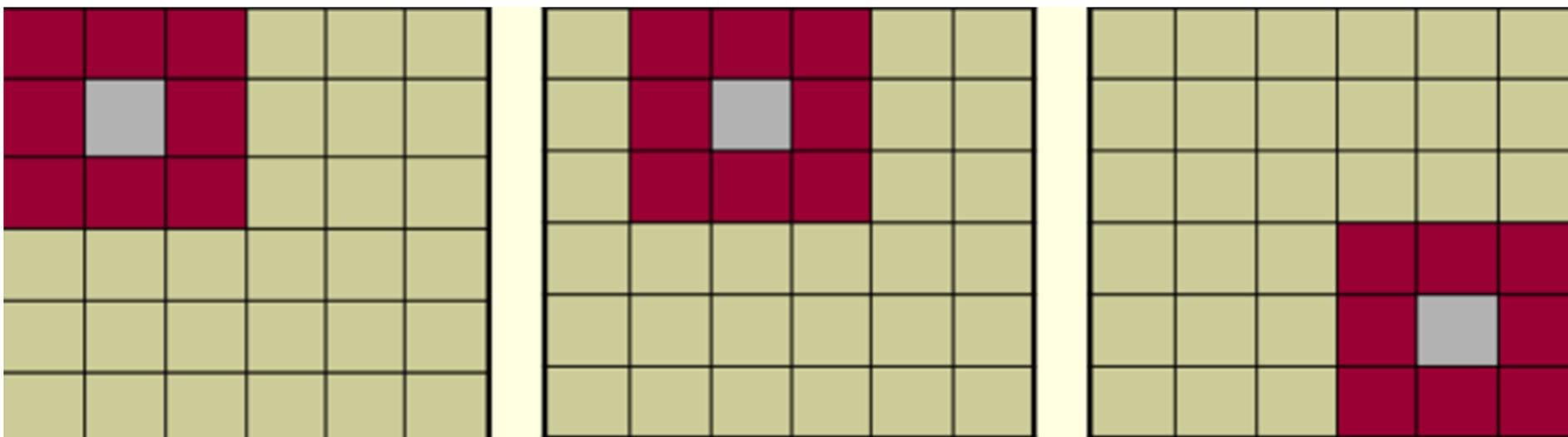


3.5 平滑（低通）空间滤波器

3.5.1 盒式滤波器核

■ 实现过程

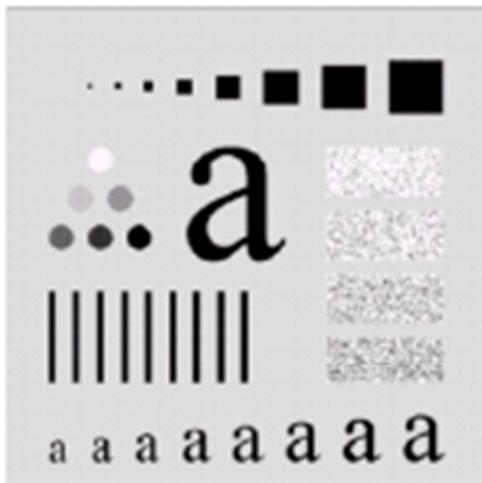
- ✓ 将核矩阵的中心依次放在图像矩阵的每一个像素位置上，将核中元素所对应的图像矩阵元素取出并参与计算，存回对应像素



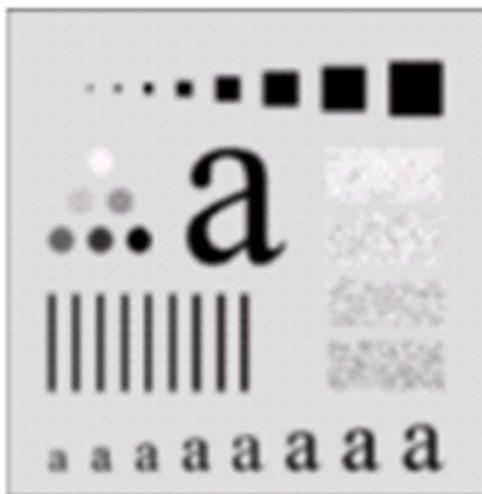
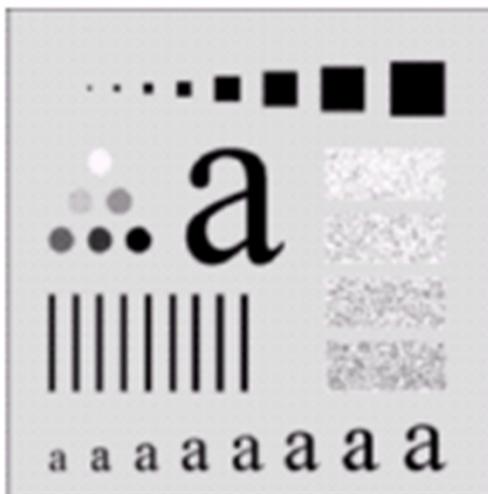
3.5 斗 原图

3.5.1 盒式滤波器核

例：使用盒式核对图像进行低通滤波

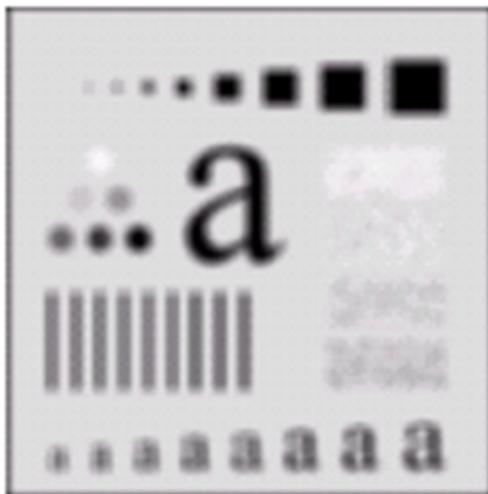


3 x 3



5 x 5

9 x 9



15 x 15

35 x 35





3.5 平滑（低通）空间滤波器

3.5.2 低通高斯滤波器核

■ 盒式滤波器核存在局限

- ✓ 对透镜模糊特性的近似能力较差
- ✓ 倾向沿垂直方向模糊图像

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4^* & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

■ 高斯核圆对称（各向同性）

$$w(s, t) = G(s, t) = Ke^{-\frac{s^2 + t^2}{2\sigma^2}}$$

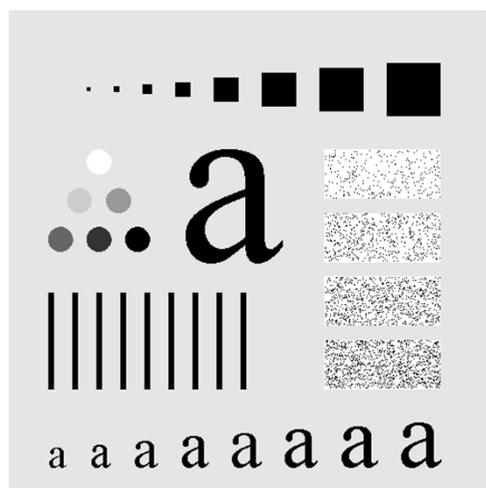
$$\text{令 } r = \left[s^2 + t^2 \right]^{\frac{1}{2}}, G(s, t) = Ke^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

- ✓ 使用大于 $\lceil 6\sigma \rceil \times \lceil 6\sigma \rceil$ 的高斯核处理图像无益
- ✓ 两个高斯函数的乘积和卷积也是高斯函数

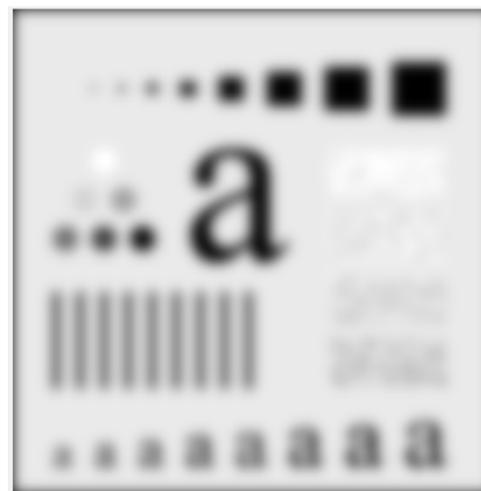
3.5 平滑（低通）空间滤波器

3.5.2 低通高斯滤波器核

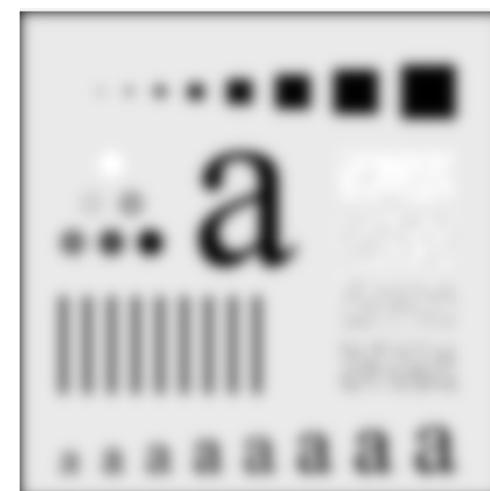
- 例1 使用高斯核对图像进行低通滤波
- ✓ 随着标准差的增大，图像细节越来越模糊
- ✓ 核的尺寸大小为不大于 $\lceil 6\sigma \rceil \times \lceil 6\sigma \rceil$ 最小奇整数



$21 \times 21, \sigma = 3.5$



$43 \times 43, \sigma = 7$



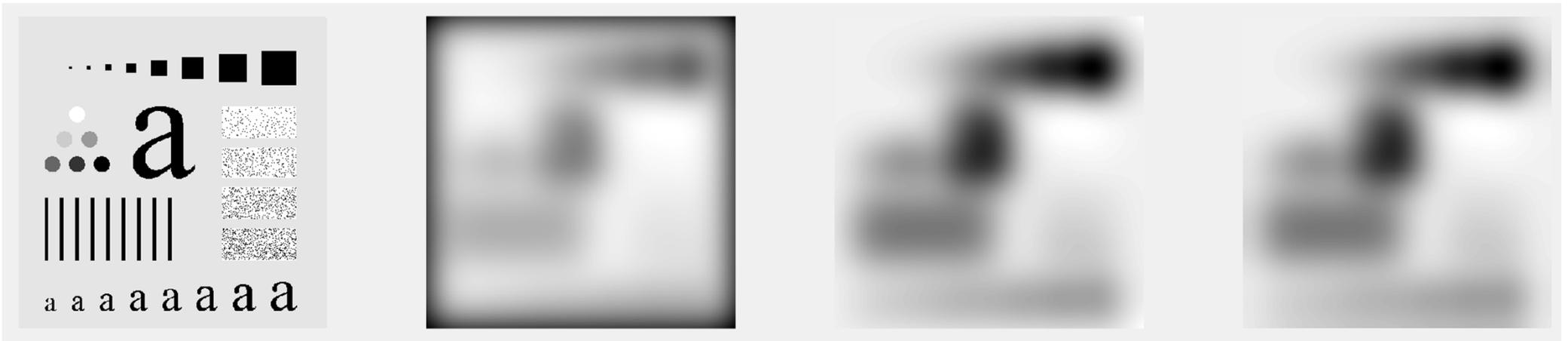
$85 \times 85, \sigma = 7$



3.5 平滑（低通）空间滤波器

3.5.2 低通高斯滤波器核

- 例1 使用高斯核对图像进行低通滤波
- ✓ 不同填充边的方法（零填充、复制、镜像）对滤波结果的影响





3.5 平滑（低通）空间滤波器

3.5.2 低通高斯滤波器核

■ 例2 高斯和盒式核平滑特性的比较

通过灰度剖面图可以看出，

- 1) 盒式核产生了线性平滑，使得边缘处从黑色到白色的过渡呈斜坡状，斜坡处是硬过渡
- 2) 高斯核会在边缘过渡周围产生更平滑的结果
- 3) 镜像和复制填充有利于消除黑色边框

3.5 平滑（低通）空间滤波器

3.5.2 低通高斯滤波器核

■ 例3 核和图像大小对平滑性能的影响

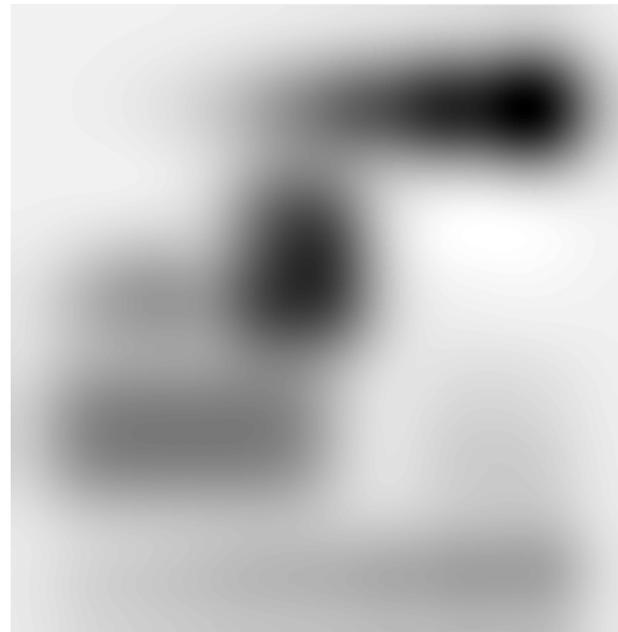
给定大小的平滑核产生的相对模糊量直接取决于图像大小

- ✓ 相同核尺寸，不同图像大小，图像分辨率越高，则越清晰
- ✓ 相同图像分辨率，核尺寸越大，则细节越模糊

$187 \times 187, \sigma = 31$



2000×2000



500×500

$745 \times 745, \sigma = 124$



2000×2000

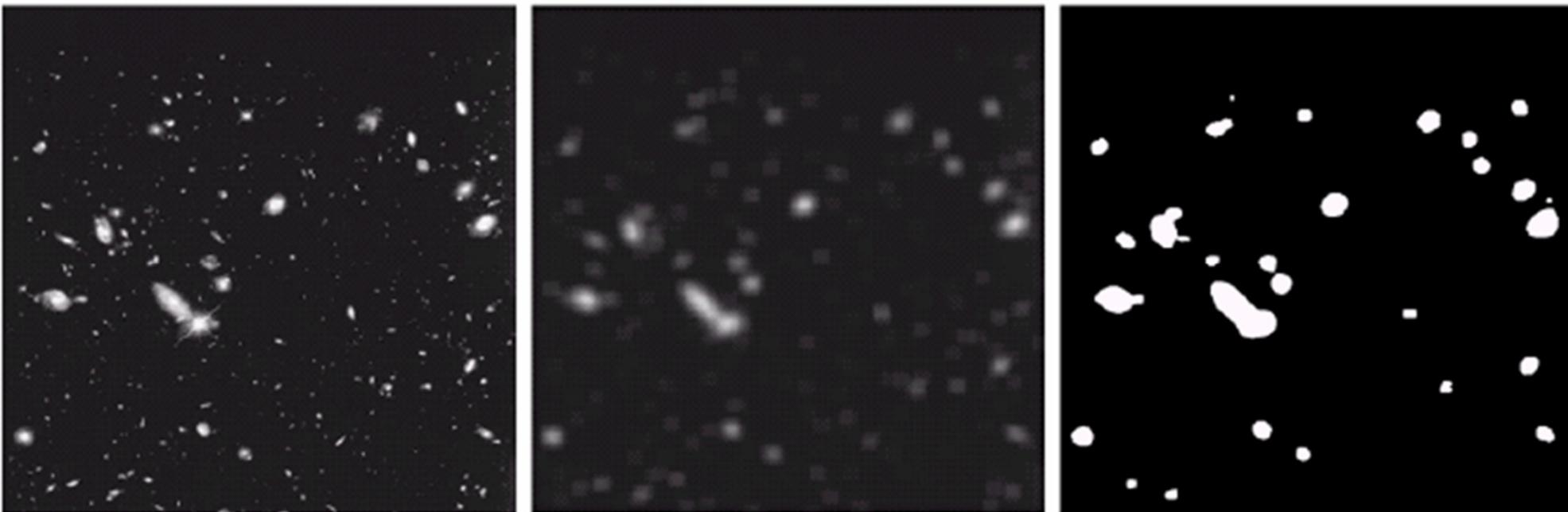


3.5 平滑（低通）空间滤波器

3.5.2 低通高斯滤波器核

■ 例4 使用低通滤波和阈值处理提取区域

如何结合使用低通滤波和灰度阈值处理来消除图像中的无关细节（无关即小于核的像素区域）





3.5 平滑（低通）空间滤波器

3.5.3 统计排序（非线性）滤波器

- 统计排序滤波器是**非线性**空间滤波器，由排序结果决定的值代替中心像素的值
- 平滑滤波器中的中值滤波器是用中心像素的邻域内的灰度值的中值替代中心像素的值
- ✓ 去除噪声
- ✓ 中值即一半小于等于 ξ ，一半大于等于 ξ
- ✓ 对图像中的某点执行中值滤波，即是对邻域内像素值排序，确定中值，并将其赋予滤波后的图像中对应邻域中心的那个像素

3.5 平滑（低通）空间滤波器

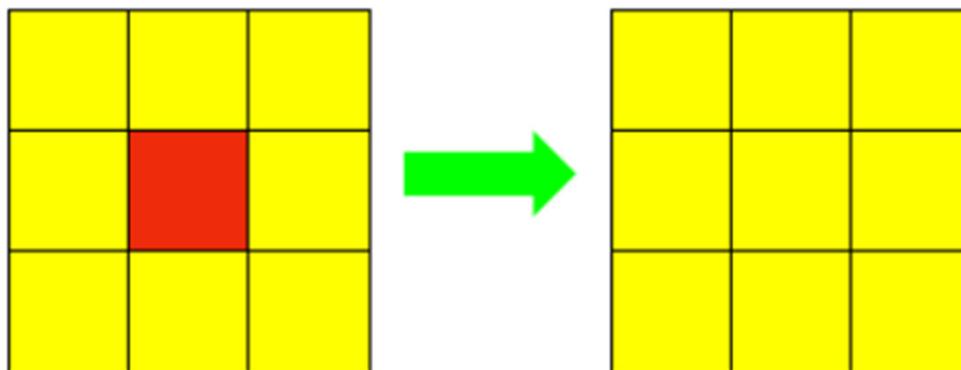
3.5.3 统计排序（非线性）滤波器

■ 中值滤波原理

- 用模板区域内像素的中间值作为结果值

$$R = \text{mid} \{z_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}$$

- 强迫突出的亮点（暗点）更像其周围的值，以消除孤立的亮点（暗点）





3.5 平滑（低通）空间滤波器

3.5.3 统计排序（非线性）滤波器

■ 中值滤波算法实现

➤ 将模板区域内像素排序，求出中间值

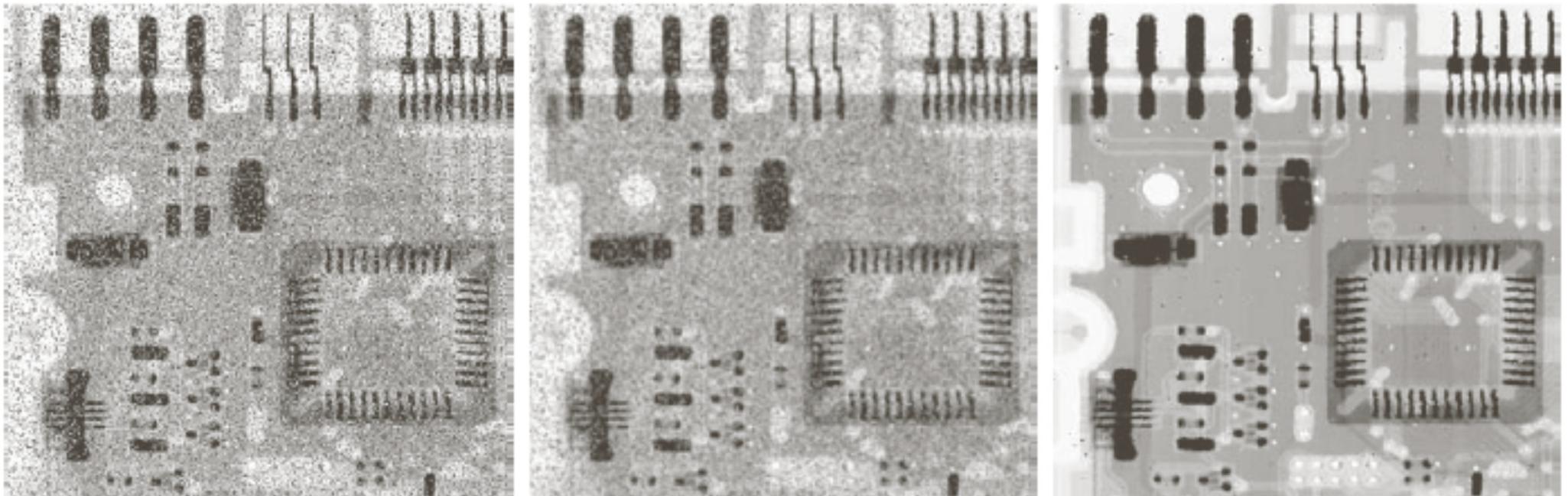
例如 3×3 模板 第5大的是中值

5×5 模板 第13大的是中值

7×7 模板 第25大的是中值

➤ 对于同值像素，连续排序

如（10,15,20,20,20,20,20,25,100）



a b c

FIGURE 3.35 (a) X-ray image of circuit board corrupted by salt-and-pepper noise. (b) Noise reduction with a 3×3 averaging mask. (c) Noise reduction with a 3×3 median filter. (Original image courtesy of Mr. Joseph E. Pascente, Lixi, Inc.)



3.6 锐化（高通）空间滤波器

3.6 锐化（高通）空间滤波器

- ✓ 锐化的作用是突出灰度中的过渡
- ✓ 锐化可以通过空间微分来实现
- ✓ 图像微分将增强边缘和其他不连续（噪声），并且不强调灰度缓慢变化的区域
- ✓ 锐化通常称为**高通**，此时**通过高频而抑制或衰减低频**



3.6 锐化（高通）空间滤波器

3.6.1 基础

- ✓ 数字函数的导数用差分来定义：恒定灰度区域导数为0，一阶导数和二阶导数在斜坡/台阶处非零

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(x+1) - f(x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)$$

- ✓ 数字图像中的灰度类似于斜坡过渡
- ✓ 二阶导数更适合增强图像细节

3.6 锐化（高通）空间滤波器

3.6.2 使用二阶导数锐化图像

✓ $f(x,y)$ 的拉普拉斯算子的离散形式

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1, y) + f(x-1, y) - 2f(x, y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y+1) + f(x, y-1) - 2f(x, y)$$

$$\nabla^2 f = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y)$$

✓ 可用如图所示的核进行卷积运算实现



$f(x-1, y+1)$

$f(x+1, y+1)$

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

$f(x-1, y-1)$ $f(x+1, y-1)$

	$f(x, y+1)$	
0	1	0
$f(x-1, y)$	$f(x, y)$	$f(x+1, y)$
1	-4	1
	$f(x, y-1)$	
0	1	0



3.6 锐化（高通）空间滤波器

3.6.2 使用二阶导数锐化图像

- ✓ 拉普拉斯算子会突出图像中的急剧灰度过渡，并且不强调缓慢变化的灰度区域。由此可以得到具有灰色边缘线和其他不连续性的图像。
- ✓ 将拉普拉斯图像与原图像相加，就可以恢复背景特征，同时保留拉普拉斯的锐化效果。
- ✓ 注意核中心值

$$g(x, y) = f(x, y) + c \left[\nabla^2 f(x, y) \right]$$

3.6 锐化（高通）空间滤波器

3.6.2 使用二阶导数锐化图像

✓ 例 用拉普拉斯锐化图像

在灰度不连续的位置，添加拉普拉斯图像增强了对比度，可以看到结果是增强了小细节并且合理地保留了背景色调的一幅图像

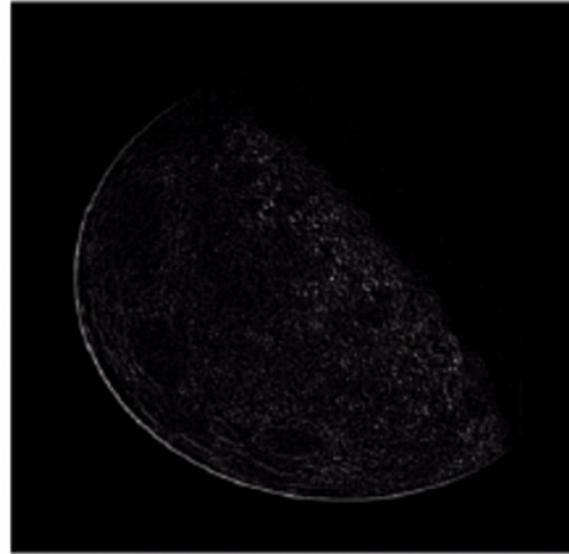


原图:月球北极 拉普拉斯滤波后的图像

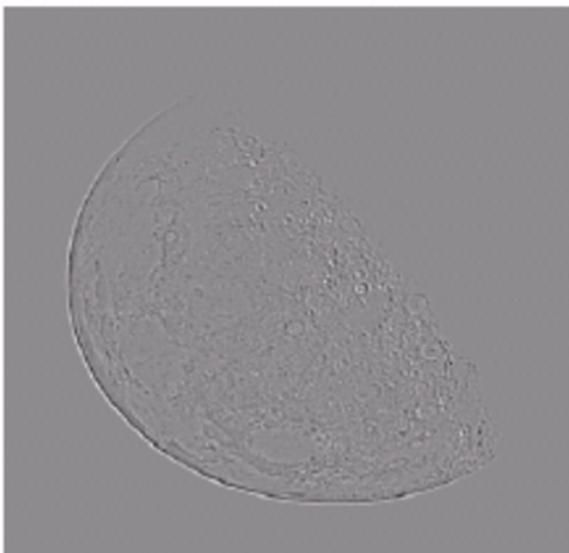
the
f the
n-
e.
l
for
oses.

7-5).
age

标
定
的
图
像



3×3, 中
心点为-8
的掩膜



原始图像
+拉普拉斯
的结果



3.6 锐化（高通）空间滤波器

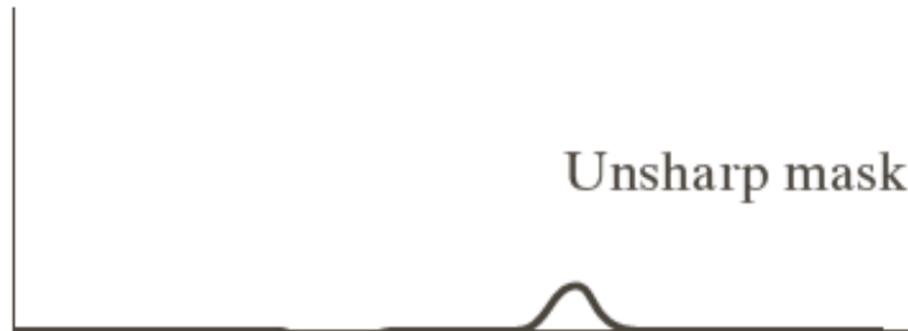
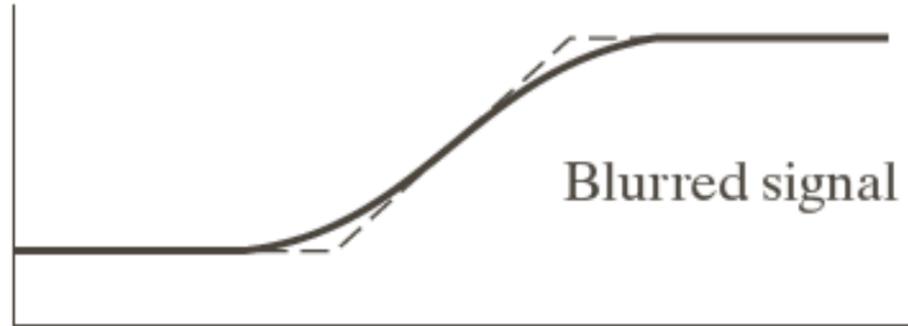
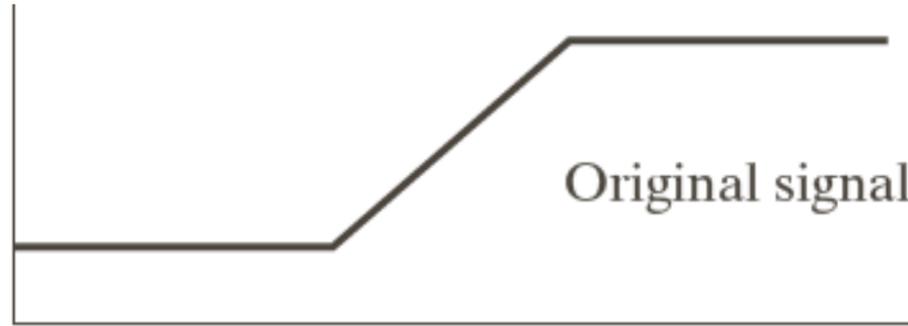
3.6.3 钝化掩蔽和高提升滤波

- 从原图像中减去一幅钝化（平滑后的）图像，以此进行图像的锐化，此被称为钝化掩蔽（高提升滤波）
- ✓ 模糊原图像 $\bar{f}(x, y)$
- ✓ 从原图像减去模糊后的图像（产生的差称为模板） $g_{\text{mask}}(x, y)$
- ✓ 将模板与原图像相加 $g(x, y)$

$$g_{\text{mask}}(x, y) = f(x, y) - \bar{f}(x, y)$$

$$g(x, y) = f(x, y) + k \cdot g_{\text{mask}}(x, y)$$

- ✓ 钝化掩蔽强调了信号中斜率出现变化的点

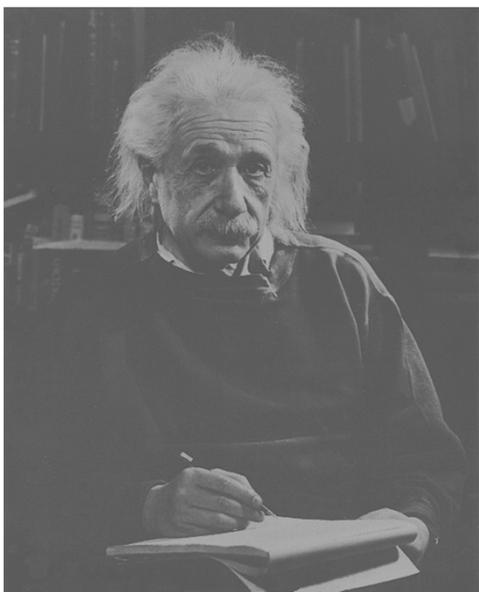




3.6 锐化（高通）空间滤波器

3.6.3 钝化掩蔽和高提升滤波

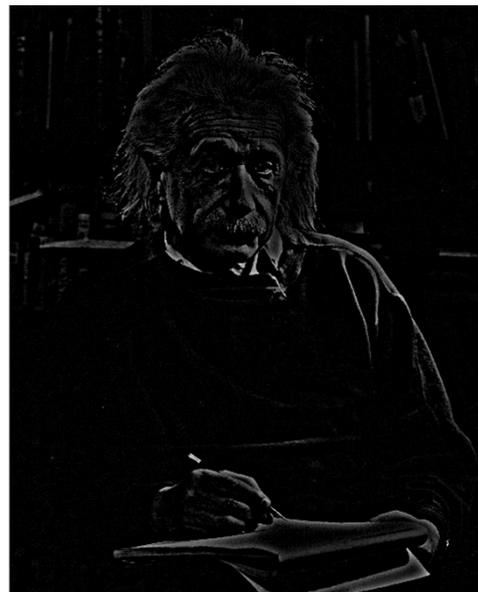
■ 例子：钝化掩蔽和高提升滤波



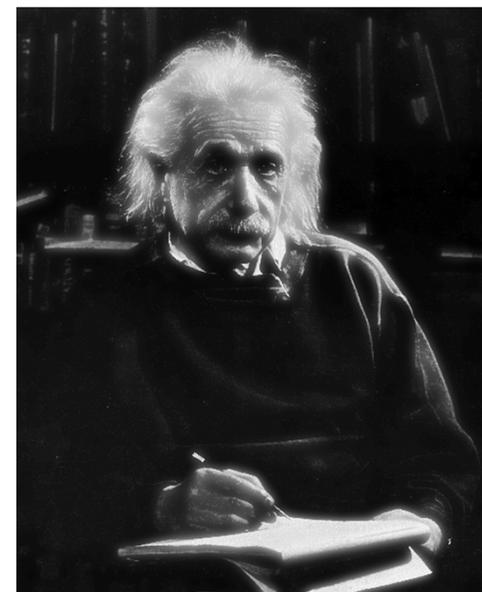
$f(x, y)$



$\bar{f}(x, y)$



$g_{\text{mask}}(x, y)$



高提升滤波器



3.5 平滑（低通）空间滤波器

3.6.4 使用1阶导数锐化图像

- ✓ 一阶梯度是用梯度幅度实现的，图像在(x,y)处的梯度定义为二维列向量，指向f的最大变化率

$$\nabla f \equiv \text{grad}(f) = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \end{bmatrix}$$

- ✓ 幅值是变化率在(x,y)处的值，可表示为

$$M(x, y) = \|\nabla f\| = \text{mag}(\nabla f) = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}$$
$$\approx |g_x| + |g_y|$$



梯度
图像

3.5 平滑（低通）空间滤波器

3.6.4 使用1阶导数锐化图像

■ 离散化近似：

罗伯特交叉梯度算子

$$g_x = z_9 - z_5$$

$$g_y = z_8 - z_6$$

$$M(x, y) = \left[(z_9 - z_5)^2 + (z_8 - z_6)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$M(x, y) \approx |z_9 - z_5| + |z_8 - z_6|$$

z_1	z_2	z_3
z_4	z_5	z_6
z_7	z_8	z_9

1	0
0	-1

0	1
-1	0



3.5 平滑（低通）空间滤波器

3.6.4 使用1阶导数锐化图像

■ 离散化近似:

Sobel梯度算子

z_1	z_2	z_3
z_4	z_5	z_6
z_7	z_8	z_9

$$g_x = \partial f / \partial x = (z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)$$

$$g_y = \partial f / \partial y = (z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)$$

$$M(x, y) = \left[(g_x)^2 + (g_y)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1



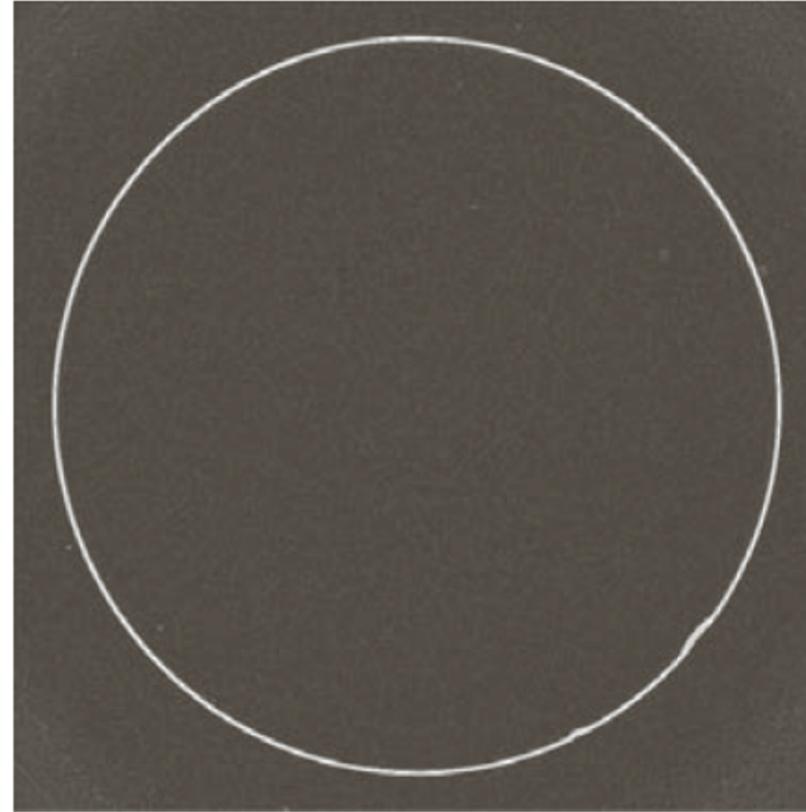
3.6 锐化（高通）空间滤波器

3.6.4 使用1阶导数锐化图像

■ 例子：使用梯度增强边缘

使用前述Sobel核得到梯度。

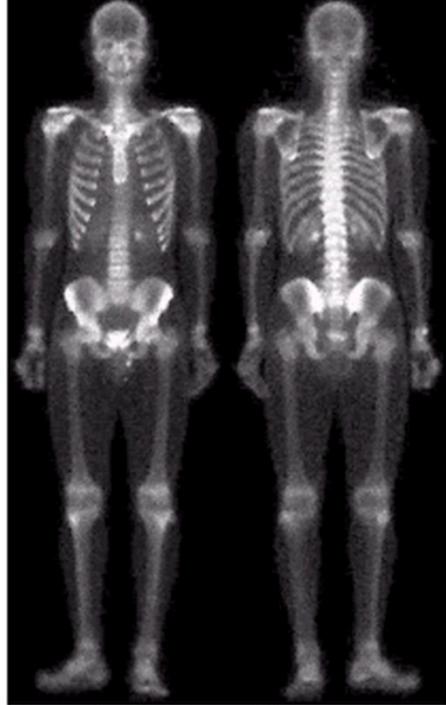
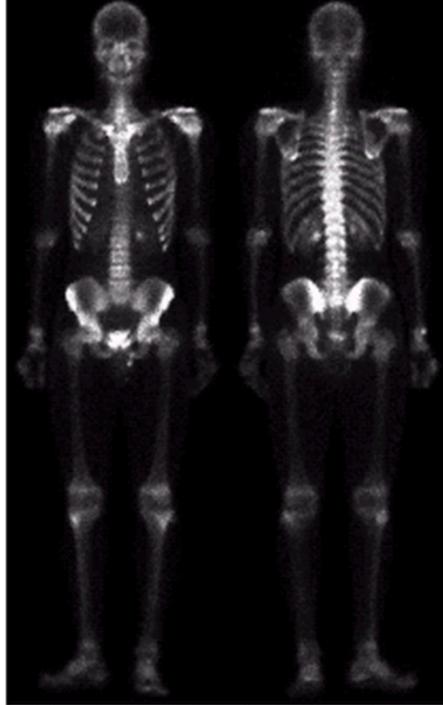
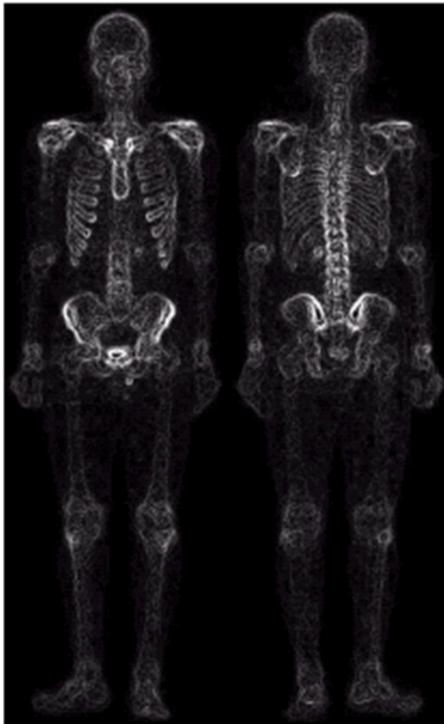
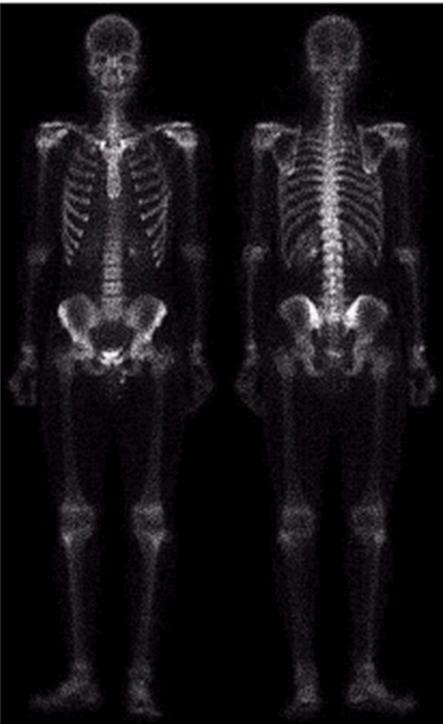
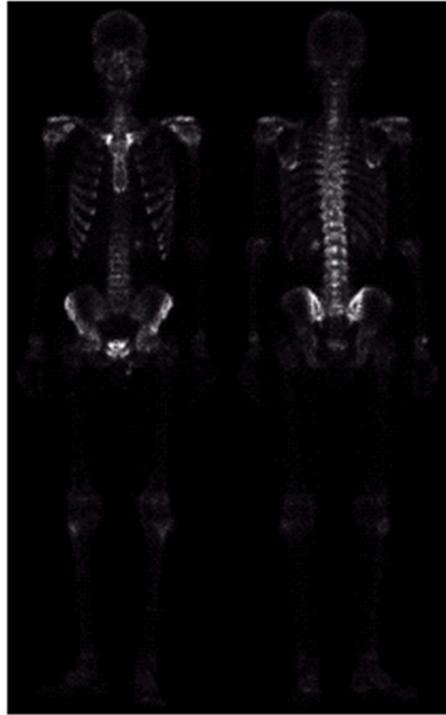
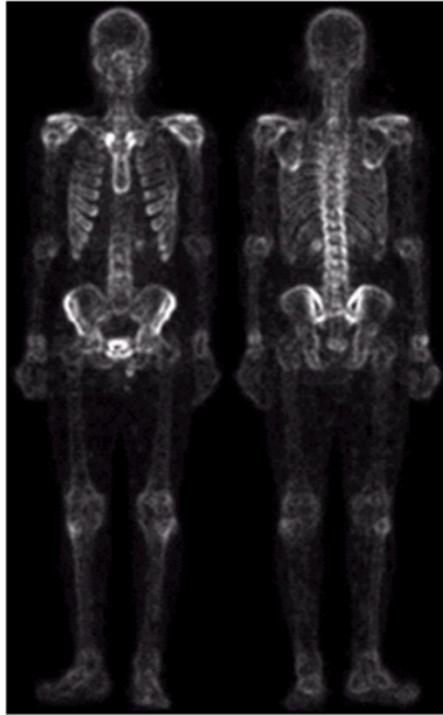
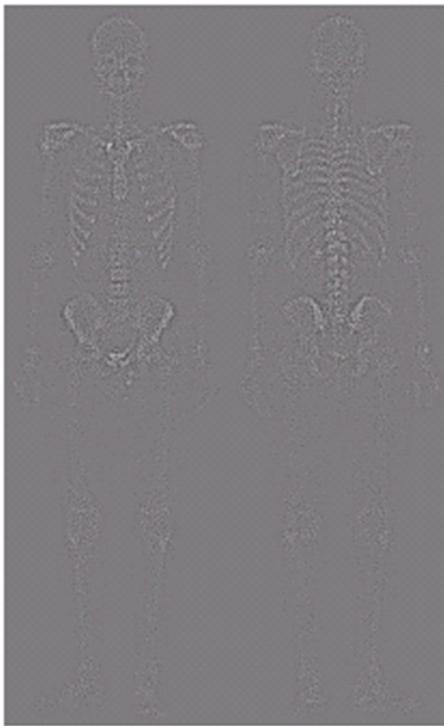
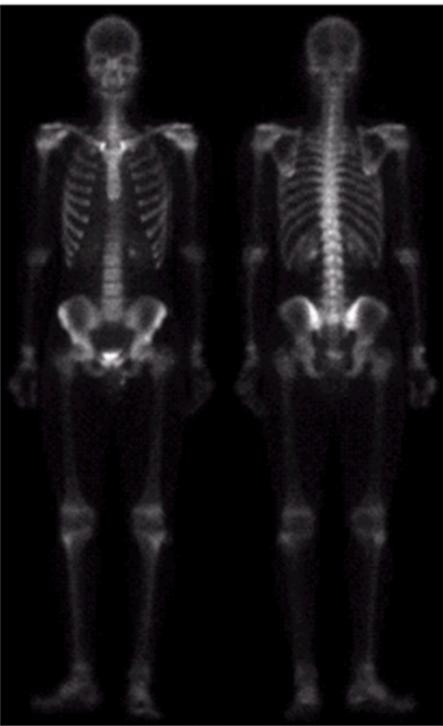
- ✓ 可以看到梯度图消除了恒定或缓慢变化的灰色阴影，因此能够简化自动检测所需的计算任务。
- ✓ 剃度还可以用来突出灰度级图像中很难看到的小尺寸图像。
- ✓ 在平坦的灰度场中增强小的不连续的能力是梯度的另一个重要特征





3.8 组合使用空间增强法

- 给定的任务需要用到几种互补技术才能得到可以令人接受的结果。本节说明如何组合前面几种方法来解决困难的图像增强任务
- 例子：锐化并显示更多的骨骼细节





杭州电子科技大学
HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY

谢谢!