



杭州电子科技大学
HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY

Digital Image Processing

数字图像处理

杭州电子科技大学自动化学院
周晓飞





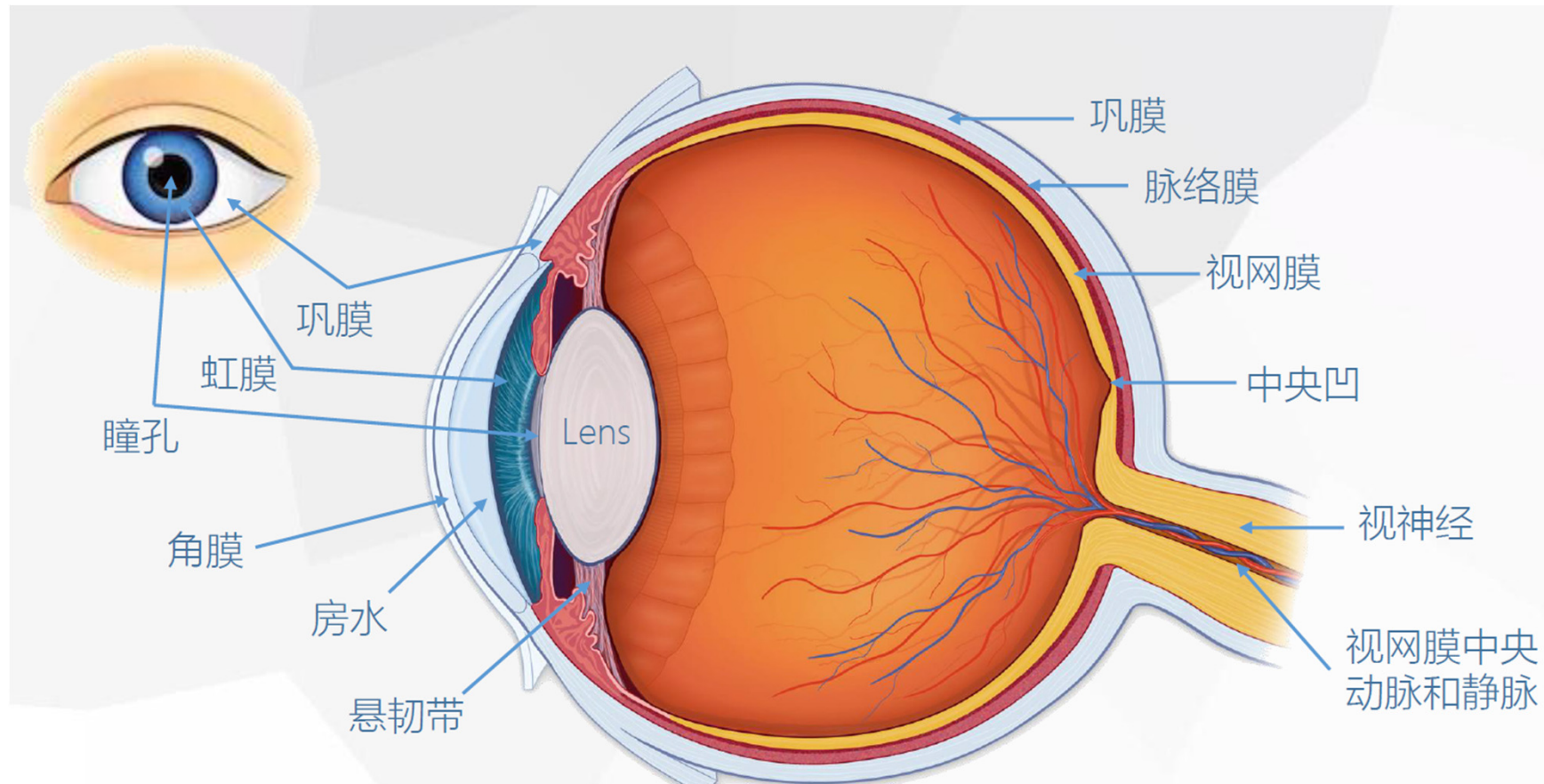
第2章 数字图像处理基础

- 2.1 视觉感知要素
- 2.2 光和电磁波谱
- 2.3 图像感知与获取
- 2.4 图像取样和量化
- 2.5 像素间的一些基本关系
- 2.6 基本数学工具介绍



2.1 视觉感知要素

- 1 人眼结构





2.1 视觉感知要素

- ◆ 感光细胞 (photoreceptor cells):
 - 杆状细胞 (rod): 单色夜视、暗视觉、单色信号敏感 (灰度传感器)
 - 锥状细胞 (cone): 彩色视觉、亮视觉、彩色信号敏感 (彩色传感器)



锥状细胞起作用



杆状细胞起作用



2.1 视觉感知要素

◆ 感光细胞 (photoreceptor cells):

- 杆状细胞 (rod) 工作的光通量范围 10^{-6} – 10^0 ML
- 锥状细胞 (cone) 工作的光通量范围: 10^{-3} – 10^4 ML



杆状体细胞工作场景示例



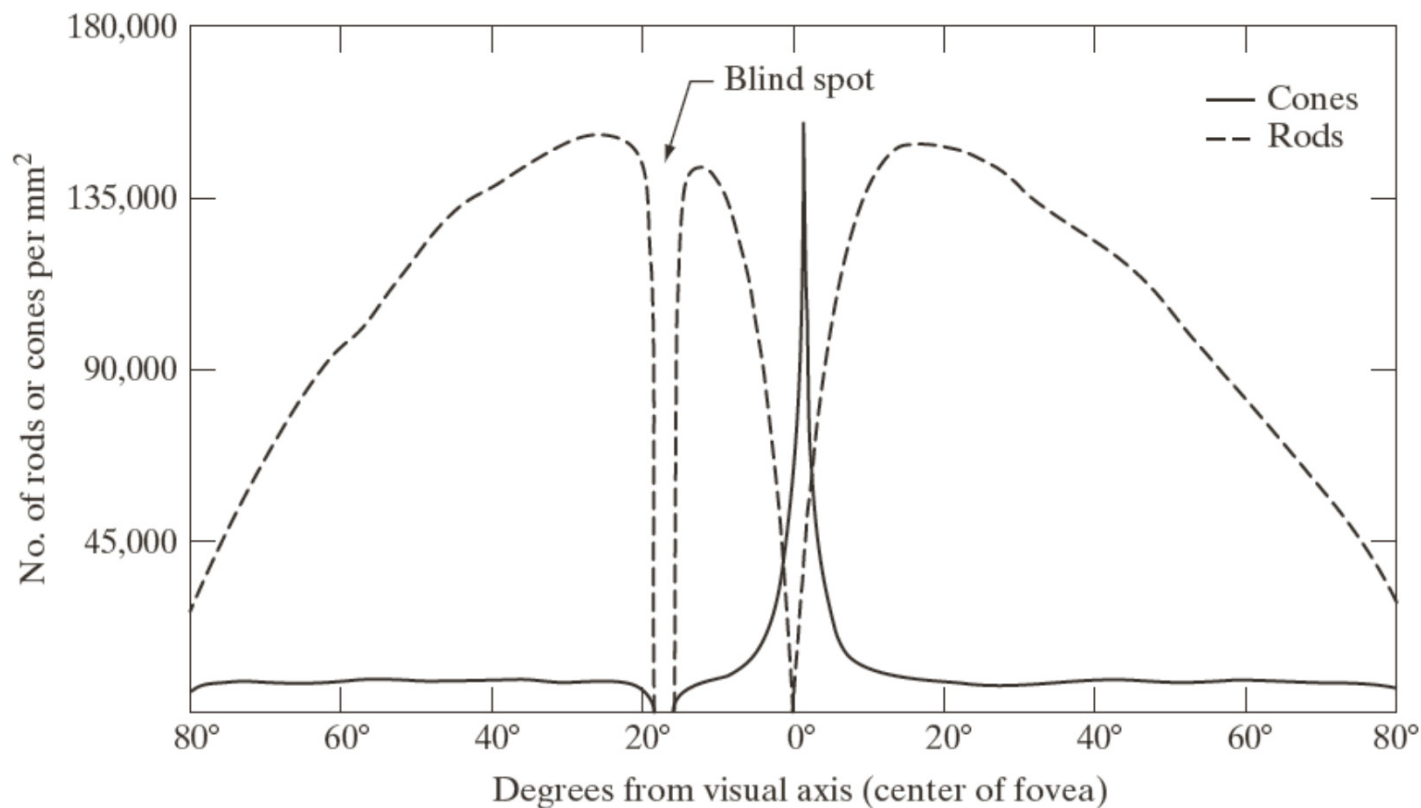
锥状体细胞工作场景示例



2.1 视觉感知要素

◆ 感光细胞 (photoreceptor cells):

- 杆状细胞 (rod) 工作的光通量范围 10^{-6} – 10^0 ML
- 锥状细胞 (cone) 工作的光通量范围: 10^{-3} – 10^4 ML





2.1 视觉感知要素

◆ 感光细胞(photoreceptor cells):

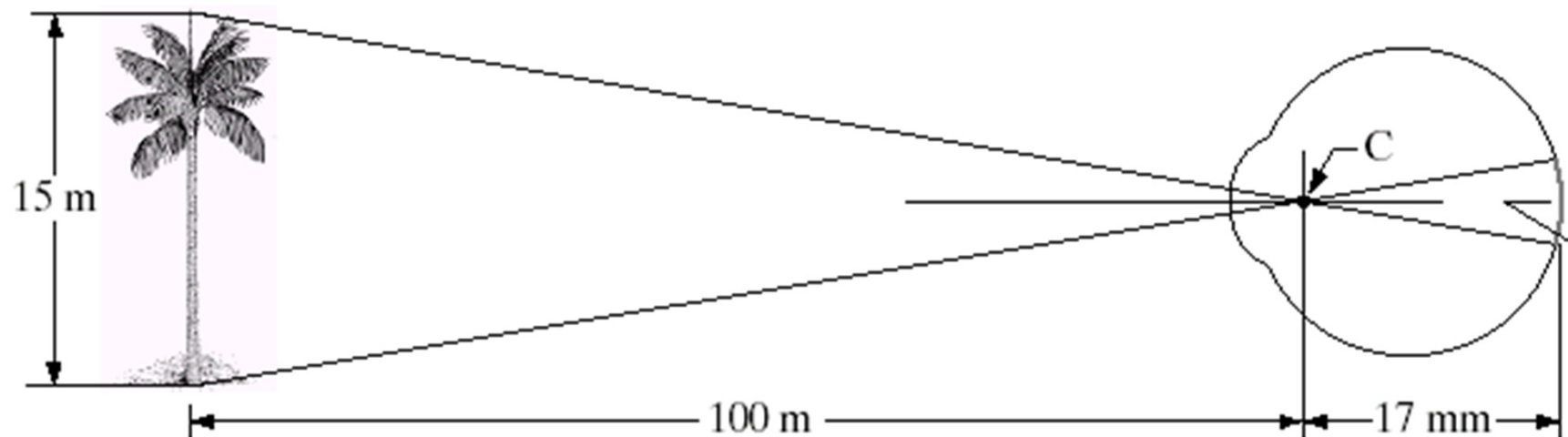
	锥状细胞	杆状细胞
细胞数量	600-700	7600-15000
敏感因素	彩色	亮度
视觉	明视觉	暗视觉
分辨力	高	低
分布位置	黄斑区	整个视网膜



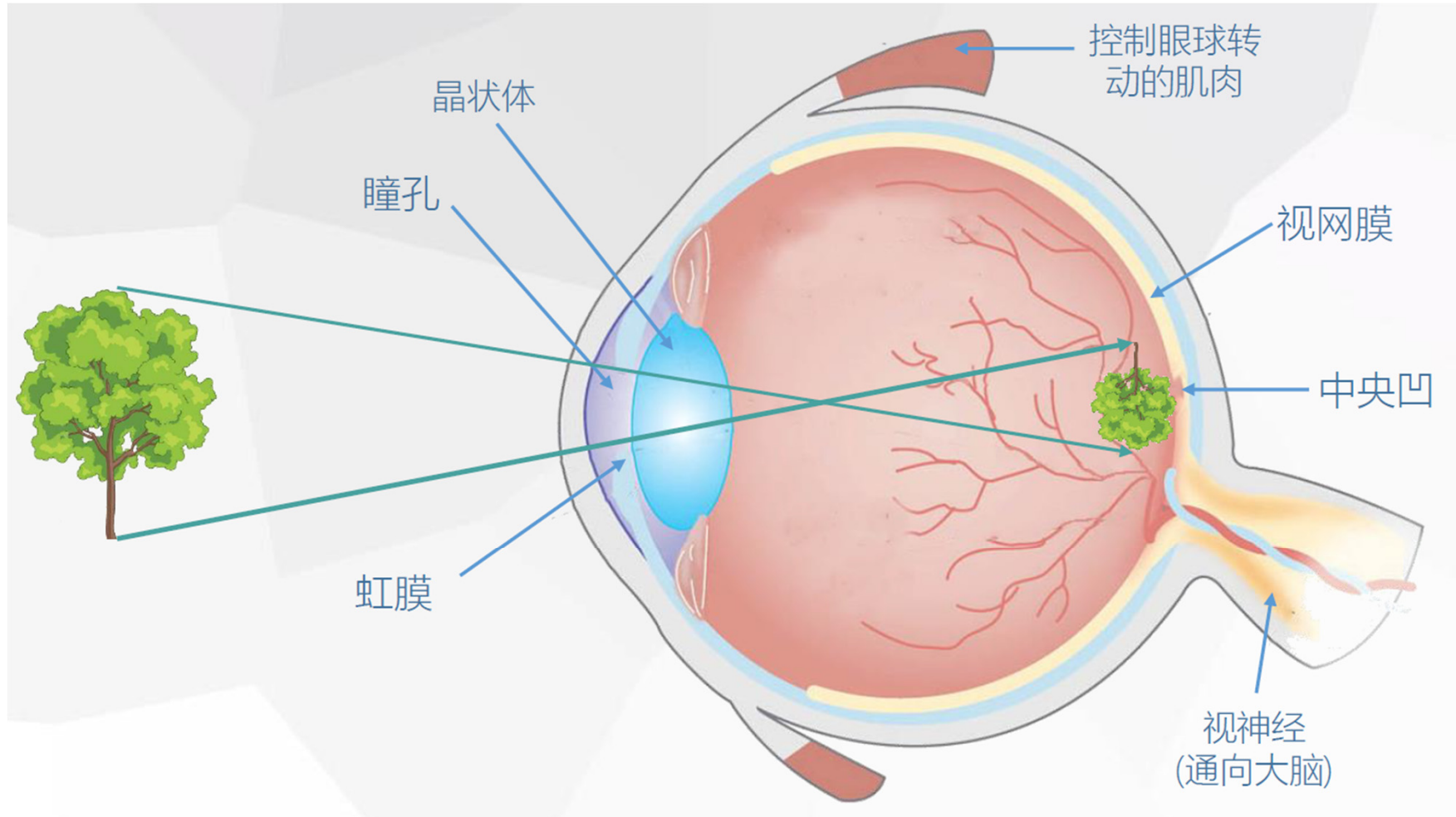
2.1 视觉感知要素

■ 2 人眼中图像的形成

- 晶状体=镜头，视网膜=成像平面
- 远离/接近目标：睫状体通过纤维压扁或加厚晶状体



- 视网膜图像聚焦在中央凹区域，光感受器的相对激励作用产生感知，把辐射能量转换为最终由大脑解码的电脉冲





2.1 视觉感知要素

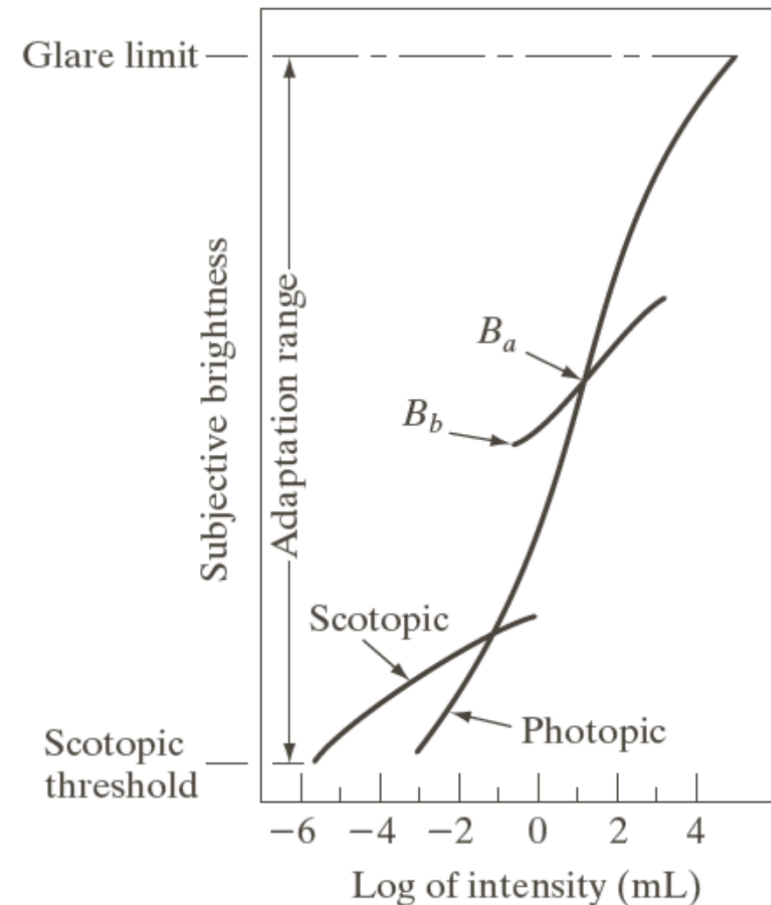
3 亮度适应与辨别

■ 客观亮度:

外界输入到人的视觉系统的光源强度（流明）

■ 主观亮度:

- 视觉系统感知的外界亮度
- 主观亮度近似为客观亮度的对数





2.1 视觉感知要素

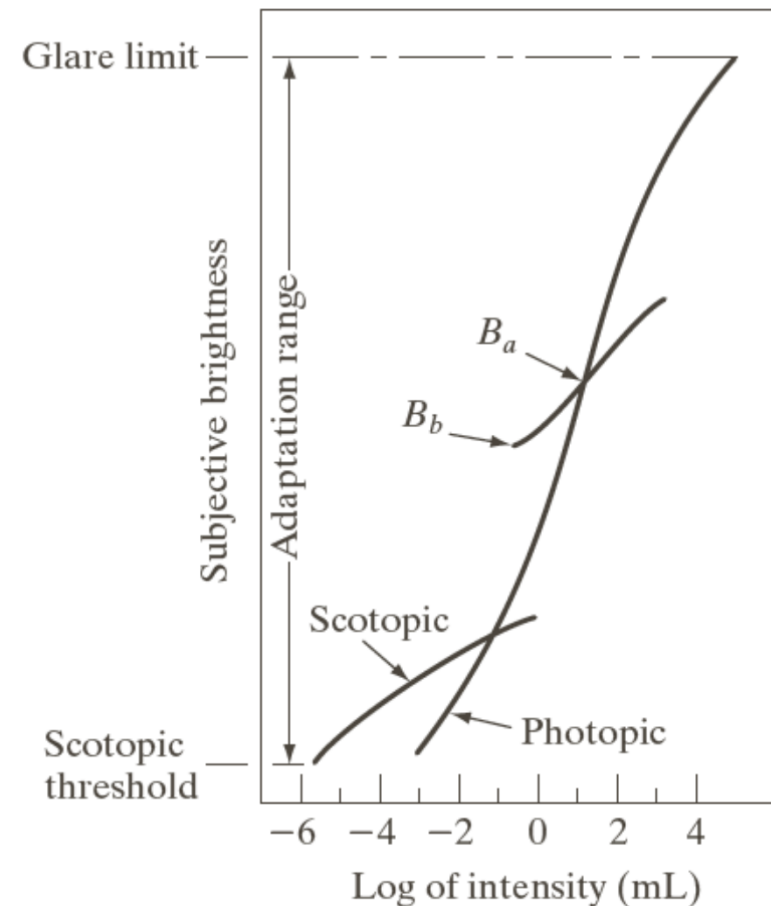
3 亮度适应与辨别

■ 主客观亮度:

- 人的视觉系统能够感知的亮度范围 $10^{-6} - 10^4$ 毫朗伯

■ 亮度适应现象

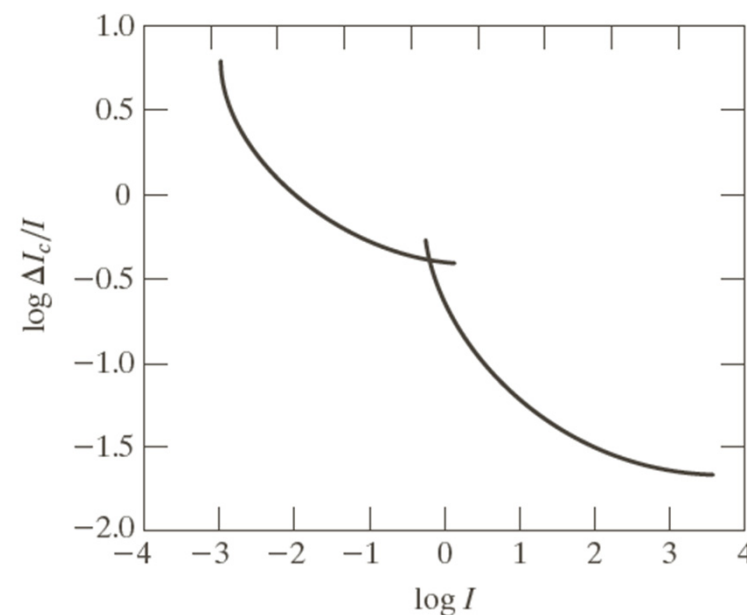
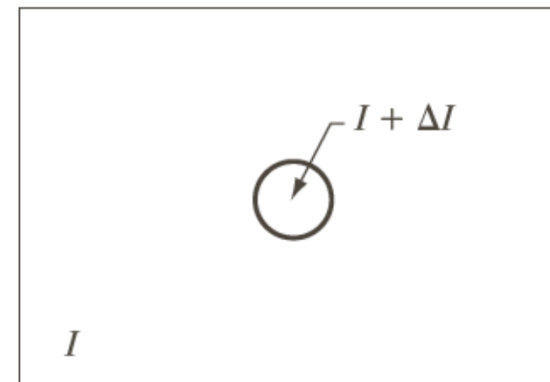
视觉系统不可能同时感知如此大的范围，在特定亮度下形成特定的亮度响应曲线，感知一定亮度范围的变化，换一个场景，则可以自动调整为与亮度环境相适应的亮度响应曲线，感知相应范围的亮度变化。此即是视觉系统的亮度适应性





2.1 视觉感知要素

- 亮度鉴别（视觉分辨力）
 - 此区域由强度 I 可变的一个光源从后面照射，视野内增加一个照射分量 ΔI ，使其以持续时间很短的闪烁，在均匀照射场中的中心显示为一个圆
- 韦伯比
 - 作为 $\log I$ 的对数， $\log \Delta I_c / I$ 曲线如图所示：在低照明级别，亮度辨别差（韦伯比大），当背景照明增加时亮度辨别得到改善。
 - 在低照明级别时，视觉由杆状体执行；在高照明级别，视觉由锥状体执行

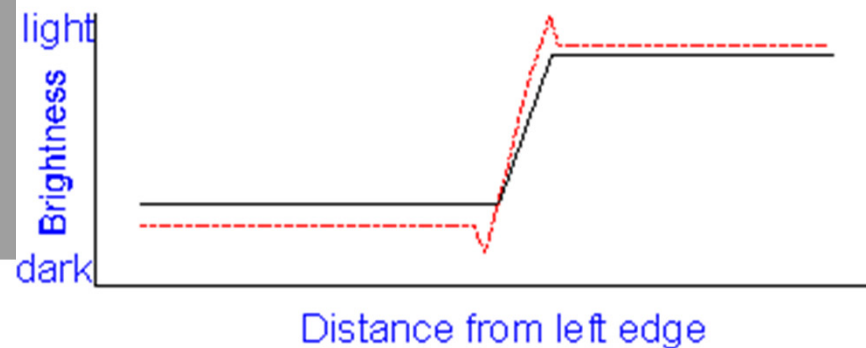
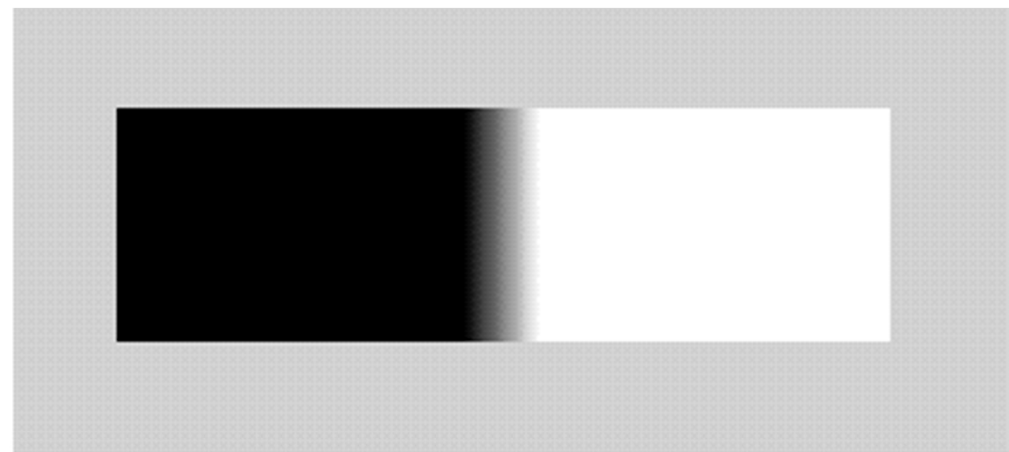




2.1 视觉感知要素

■ 两个视觉现象：1) 马赫带效应

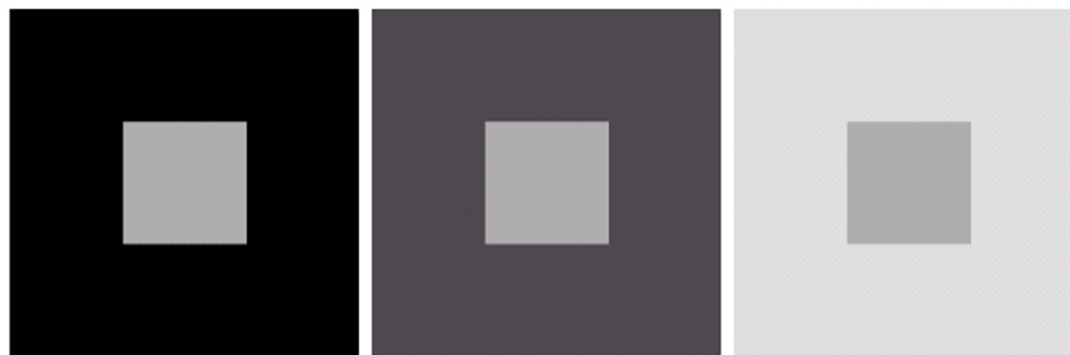
视觉系统往往会在不同灰度区域的边界出现“下冲”或“上冲”现象





2.1 视觉感知要素

- 两个视觉现象-2) 同时对比
一个区域的感知亮度并不只取决于其灰度



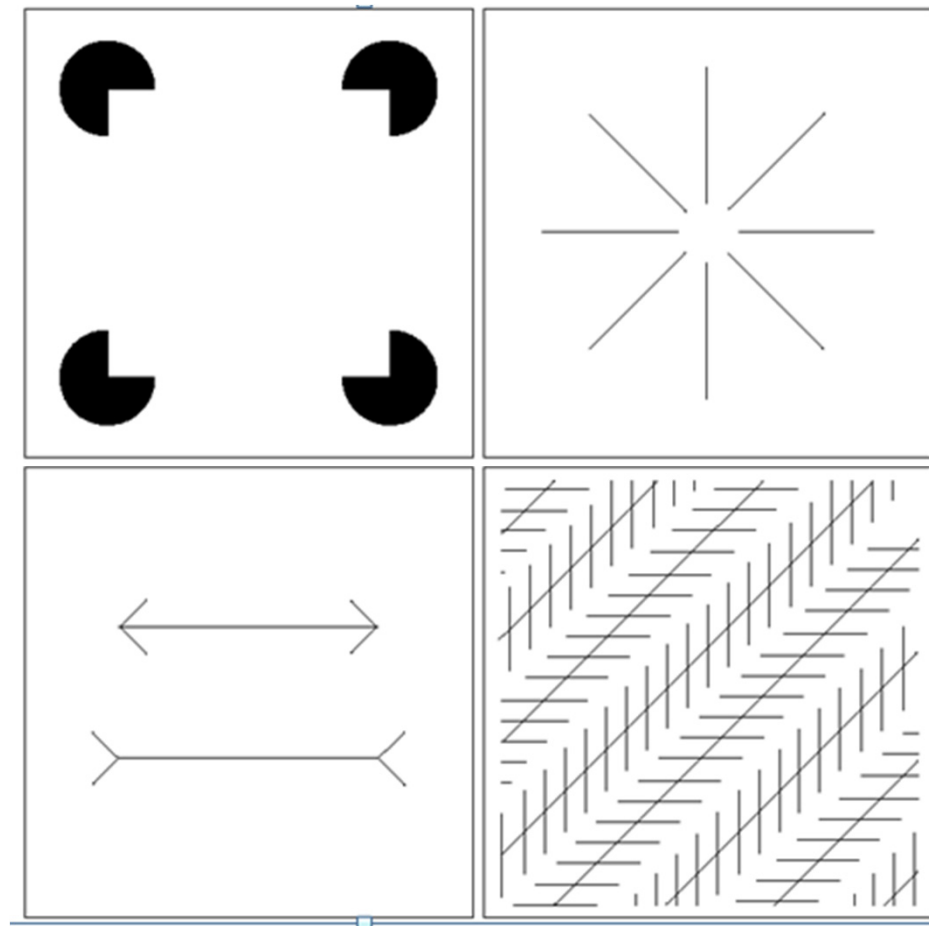
a b c

FIGURE 2.8 Examples of simultaneous contrast. All the inner squares have the same intensity, but they appear progressively darker as the background becomes lighter.



2.1 视觉感知要素

- 光学错视（视觉错觉/幻觉）
 - 人眼中充斥着不存在的信息
 - 错误感知物体的几何特点





2.2 光和电磁波谱

■ 电磁波谱

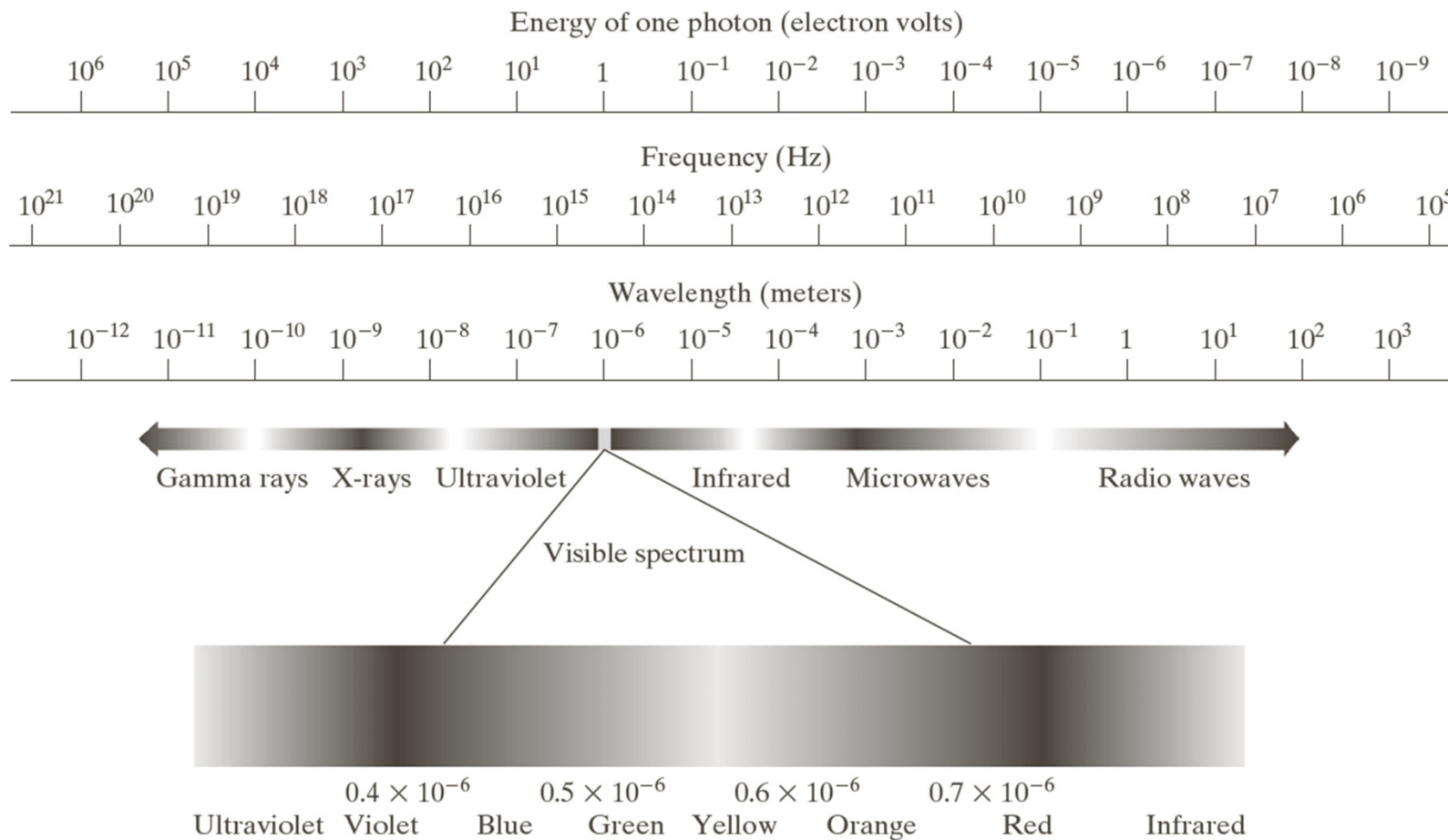
$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \quad E = h\nu$$

电磁波视作波长 λ 传播的正弦波，或无质量的粒子流，每个例子均具有一定能量，被称作光子



2.2 光和电磁波谱

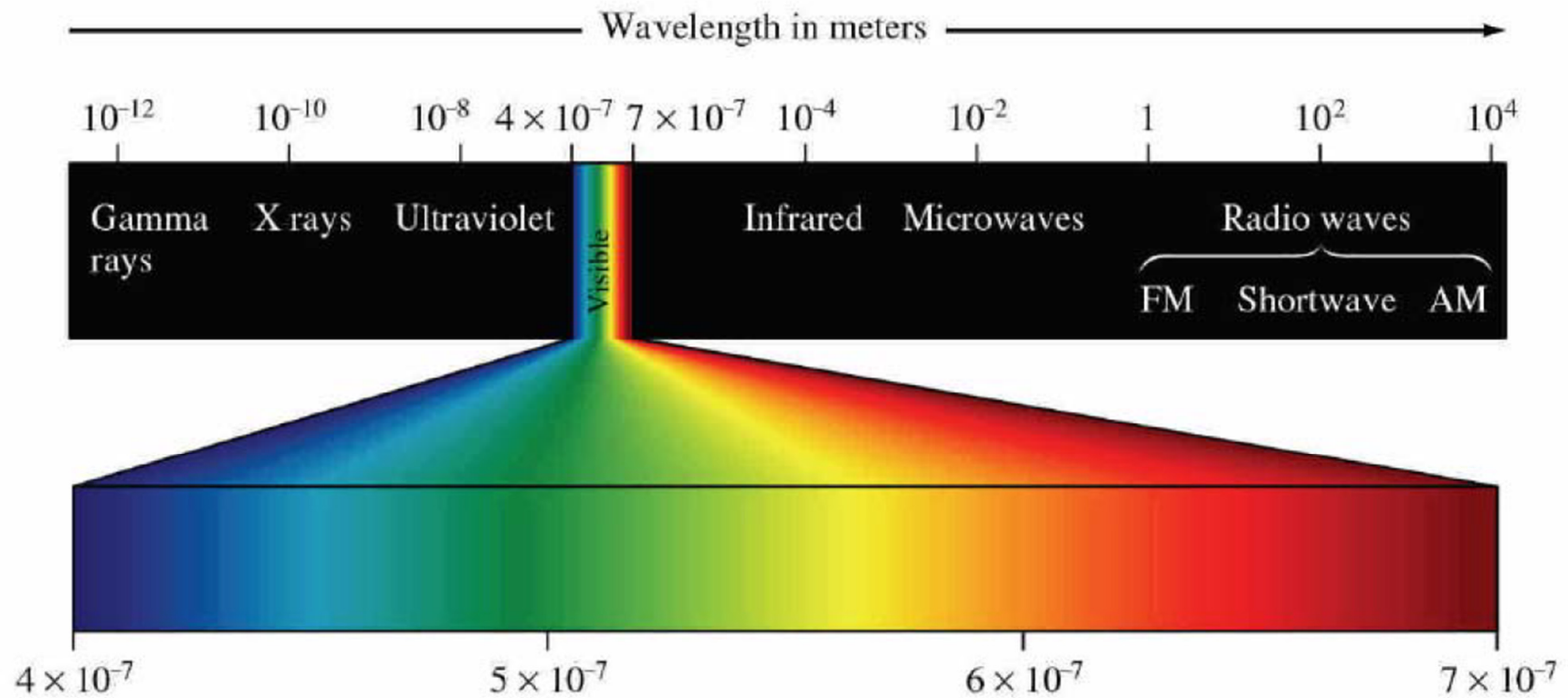
■ 电磁波谱





2.2 光和电磁波谱

■ 电磁波分布





2.2 光和电磁波谱

■ 单色光（无色光）

- 单色光从黑到白的数值范围称为灰度级
- 单色光图像通常称为灰度图像

■ 辐射、光通量、亮度

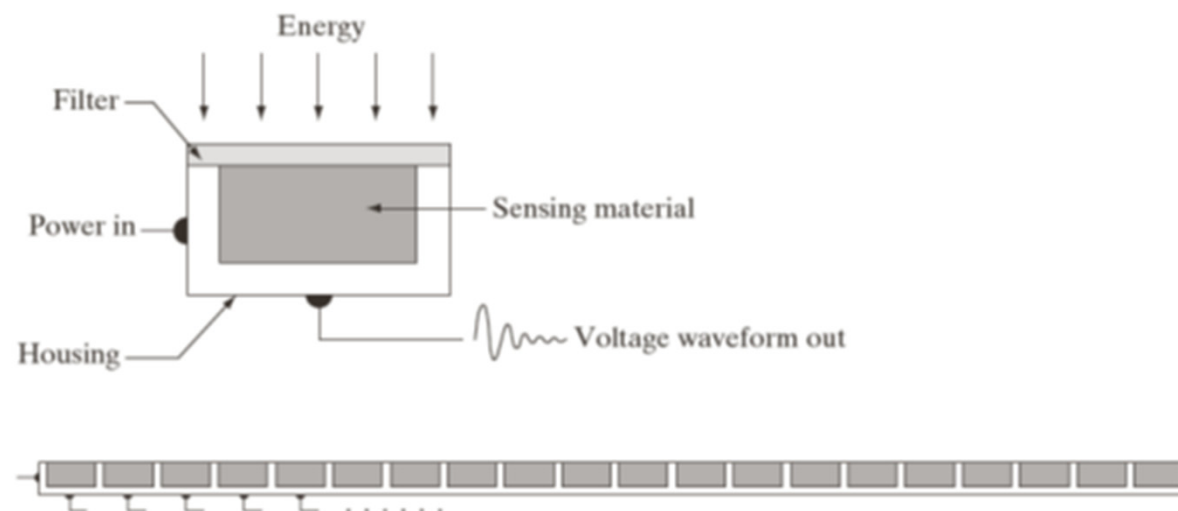
- 辐射表示从光源流出的总能量（瓦特W）
- 光通量是观察者从光源感知的能量（流明lm）
- 亮度是光感知的主观描绘子，描述色彩感觉



2.3 图像感知与获取

■ 图示为将照射能量转换为数字图像的三种主要传感器配置

结合输入电能和传感器对正被检测能量类型的响应，将入射能量转换为电压，输出电压波形是传感器的响应，将传感器响应数字化，得到一个数字量





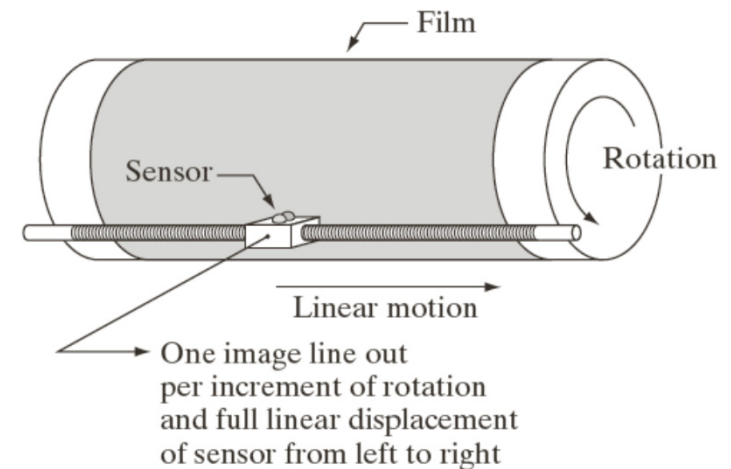
2.3 图像感知与获取

1、使用单个传感器获取图像

■ 生成二维图像

鼓内光强通过胶片密度进行调制，以此产生不同电压，电压的变化最终由数字化处理转换为图像灰度级

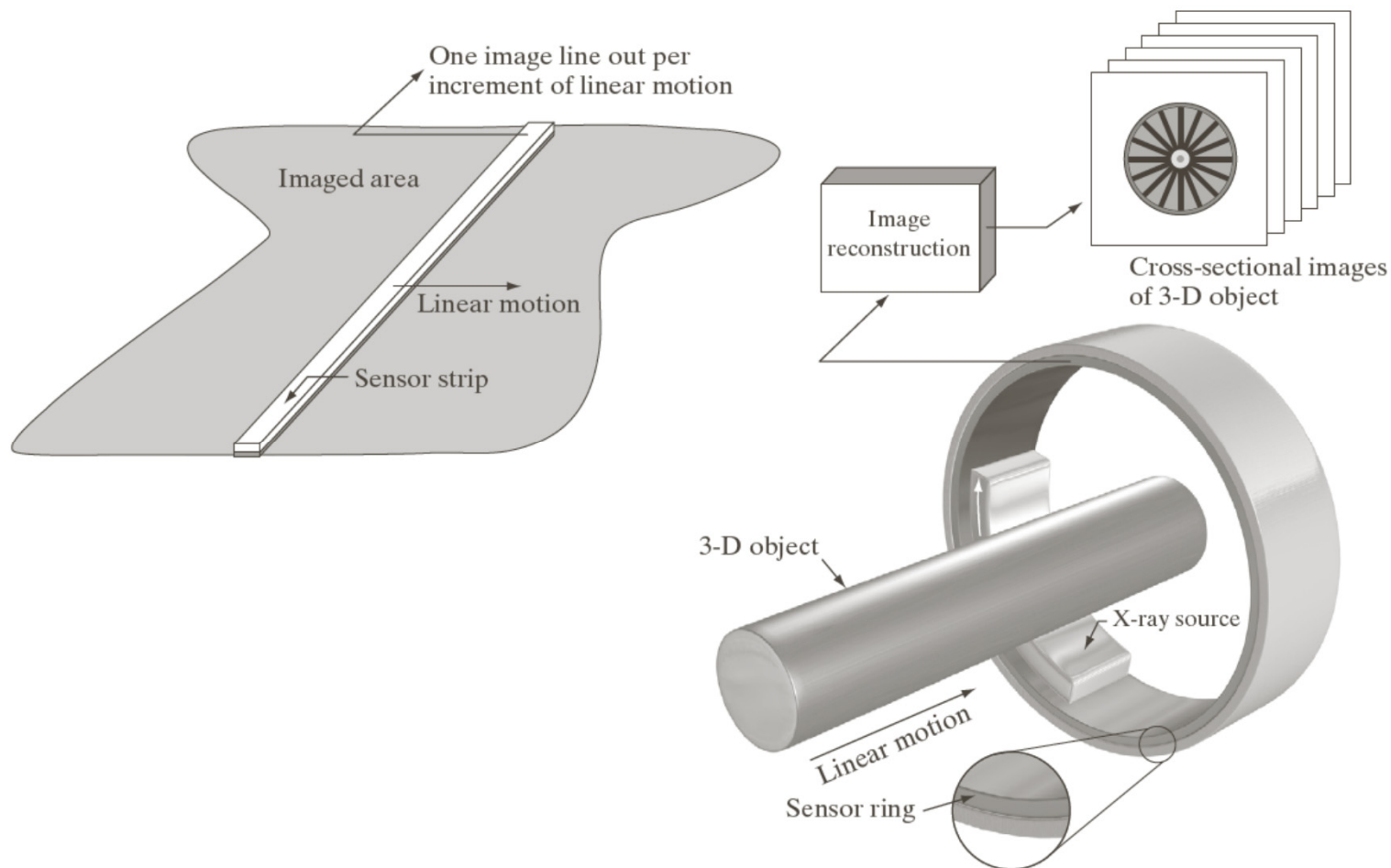
■ 缺点：速度慢、不便携带





2.3 图像感知与获取

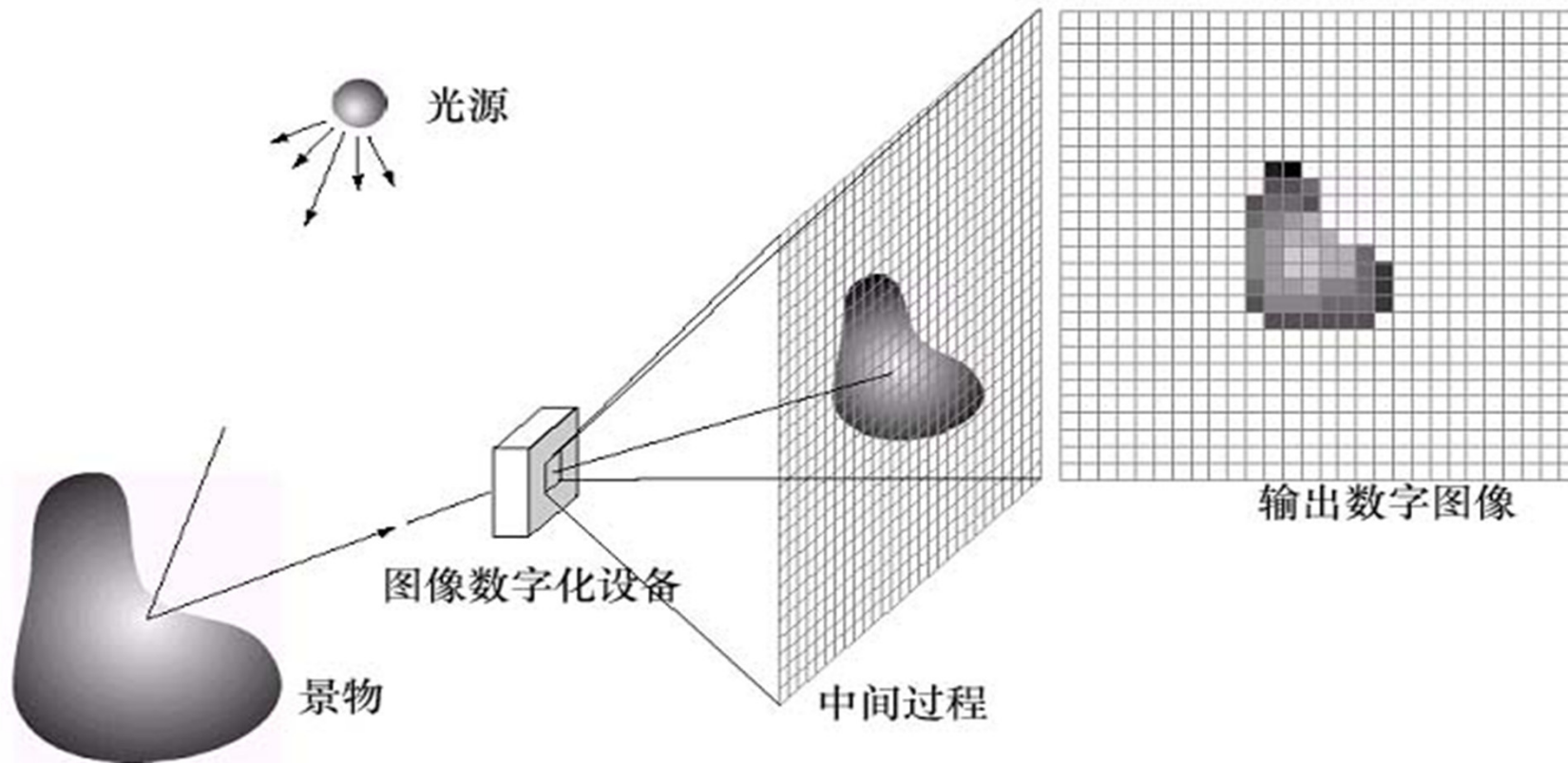
- 2、使用条带传感器获取图像





2.3 图像感知与获取

- 3、使用阵列传感器获取图像
 - CCD传感器





2.3 图像感知与获取

- 4、简单成像模型

- $f(x,y)$ 表示二维图像， $0 \leq f(x,y) < \infty$

- $f(x,y) = i(x,y)r(x,y)$,

其中 $0 \leq i < \infty$ & $0 \leq r \leq 1$; i 入射分量, r 反射分量

- 区间 $[Lmin, Lmax]$ 称为灰度级, $[0,1]$

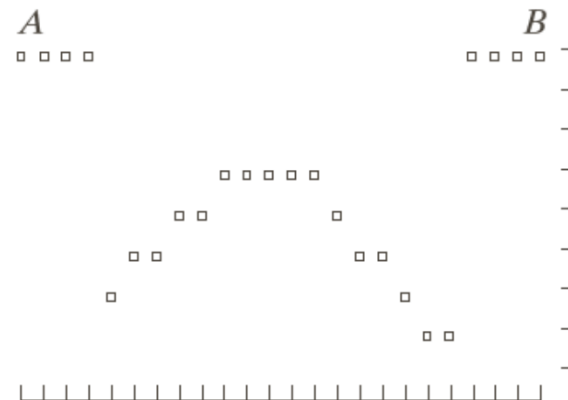
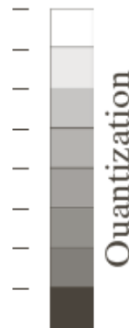
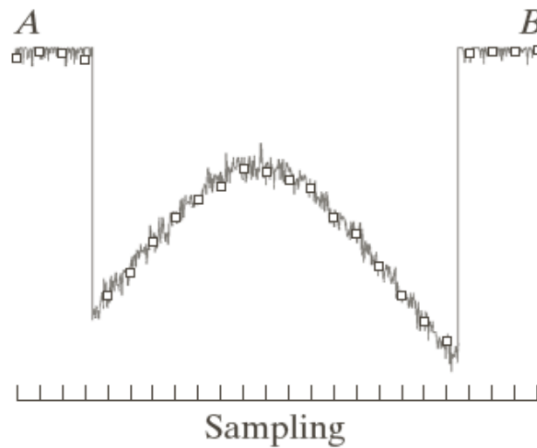
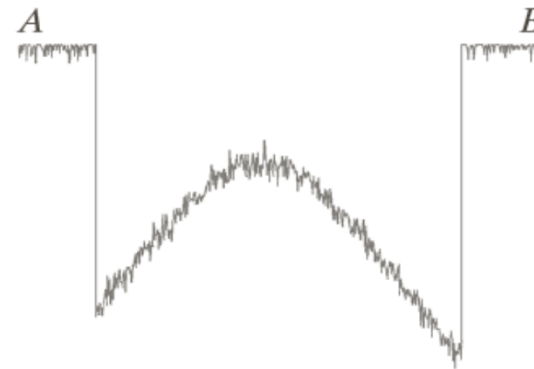
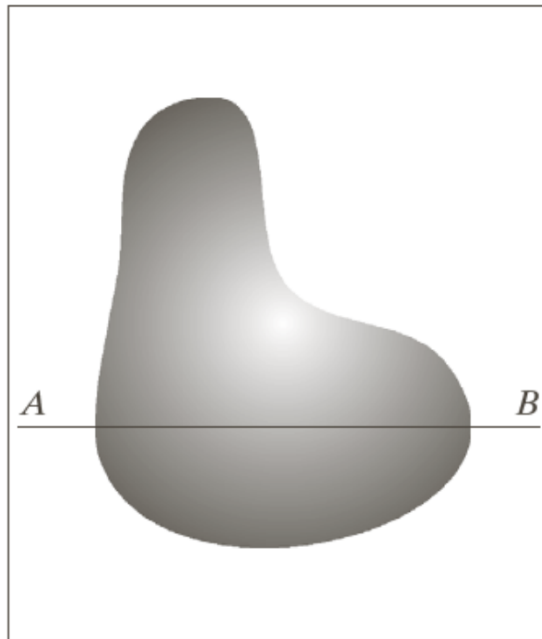


2.4 图像取样和量化

- 1、取样和量化的基本概念
 - 将坐标和幅值进行取样。
 - ✓ 坐标值数字化称为采样
 - ✓ 幅值数字化称为量化



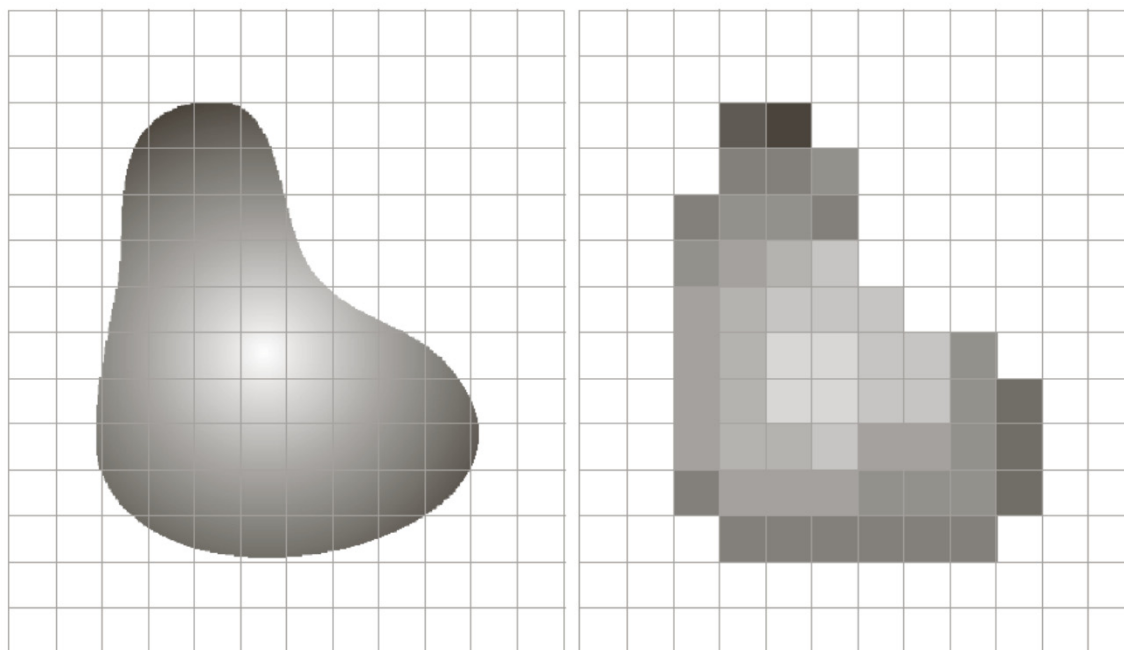
2.4 图像取样和量化





2.4 图像取样和量化

- 数字图像的质量很大程度上取决于取样和量化中所用的样本数和离散灰度级



a b

FIGURE 2.17 (a) Continuous image projected onto a sensor array. (b) Result of image sampling and quantization.



2.4 图像取样和量化

- 2、数字图像表示
 - $f(x,y)$ 包含M行和N列，其中， $x=[0,M-1]$, $y=[0,N-1]$ 。
 - 二维离散函数 $f(x,y)$ 和二维矩阵A

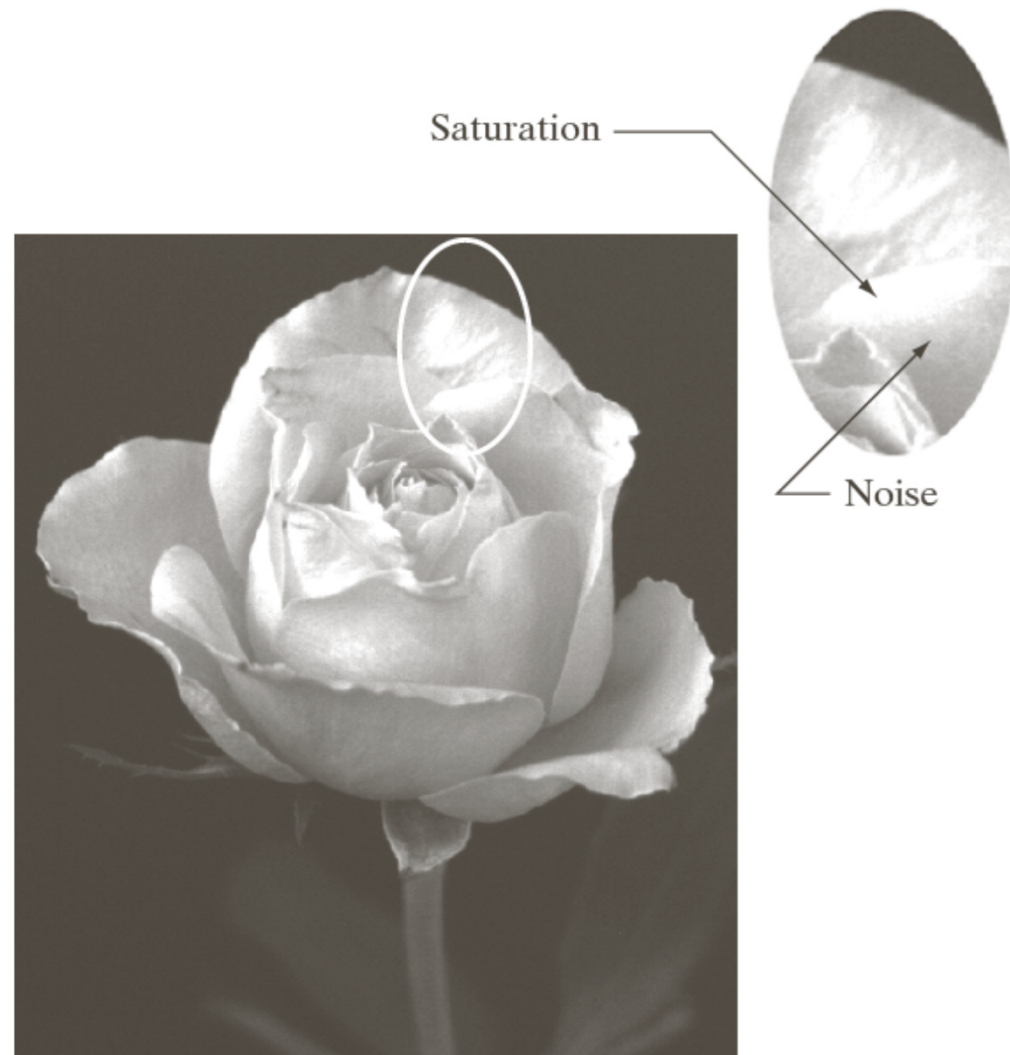
$$f(x,y) = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0,N-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \dots & f(1,N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(M-1,0) & f(M-1,1) & \dots & f(M-1,N-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{M-1,0} & a_{M-1,1} & \dots & a_{M-1,N-1} \end{bmatrix}$$



2.4 图像取样和量化

- 2、数字图像表示
 - 图像数字化要求对M、N和L进行判定
 - M/N均为整数
 - $L=2^k$
 - 动态范围：
 - 灰度跨越的值，最大可度量灰度与最小可检测灰度之比，上限为饱和度，下限为噪声





2.4 图像取样和量化

- 2、数字图像表示
 - 图像对比度
 - 最高和最低灰度级间的灰度差
 - 反差比是这两个量的比率
 - 存储数字图像所需比特数
 - $b = MNk$
 - K 比特图像





2.4 图像取样和量化

- 3、线性索引和坐标索引

- 线性索引

- 一维的非负整数串，计算(0,0)偏移得到
- 基于图像的行扫描和列扫描
- 给定坐标 (x,y) ,则 $a=My+x$
- 反之， $x=a \bmod M$ $y=(a-x)/M$



2.4 图像取样和量化

- 4、空间分辨率和灰度分辨率
 - 空间分辨率
 - 广泛使用的是单位距离内可分辨的最大线对数
 - 点数/单位距离是印刷和出版业中常用的图像分辨率的测度
 - USA 常用点数/英寸 (dpi) 表示 (e.g. 报纸75dpi)
 - 灰度分辨率
 - 灰度级中可分辨的最小变化；通常是2的整数次幂
 - 灰度量化的时候所用的比特数 (灰度图256级，8比特)
 - 受到噪声、饱和度和人类视觉对场景感知能力的影响



2.4 图像取样和

- 4、空间分辨率和灰度分辨率

降低数字图像空间分辨率的影响

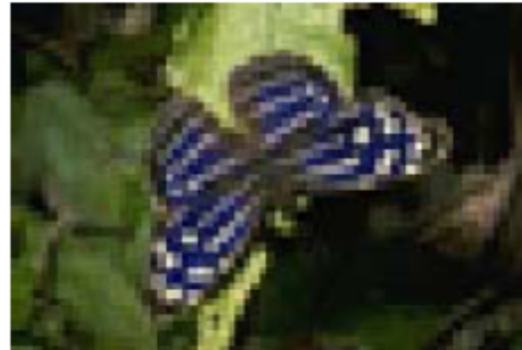




265x180



133x90



66x45



33x22



2.4 图像取样和量化

- 4、空间分辨率和灰度分辨率
 - 改变数字图像灰度级数





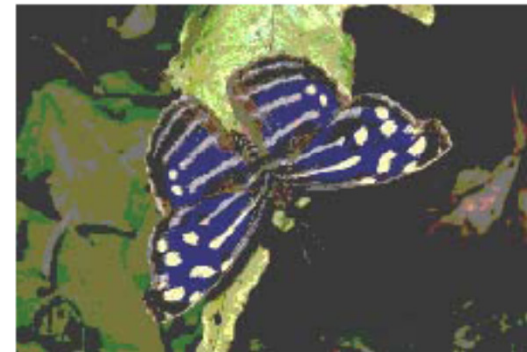
256灰度级



16灰度级



8灰度级



4灰度级



2.4 图像取样和量化

- 4、空间分辨率和灰度分辨率

- 二者之间存在关系 (N & K)

- 等偏爱曲线倾向于右上方移动
- 细节丰富的图像如人群需要较少的灰度级，降低分辨率容易引起细节损失，导致图像质量下降；减小灰度级数，不致丢失图像细节，因而图像质量保持较好
- 细节欠丰富的图像如人脸和摄影师降低分辨率不会引起细节损失，但需要较高的灰度级，以减少灰度变化平缓区域的伪影

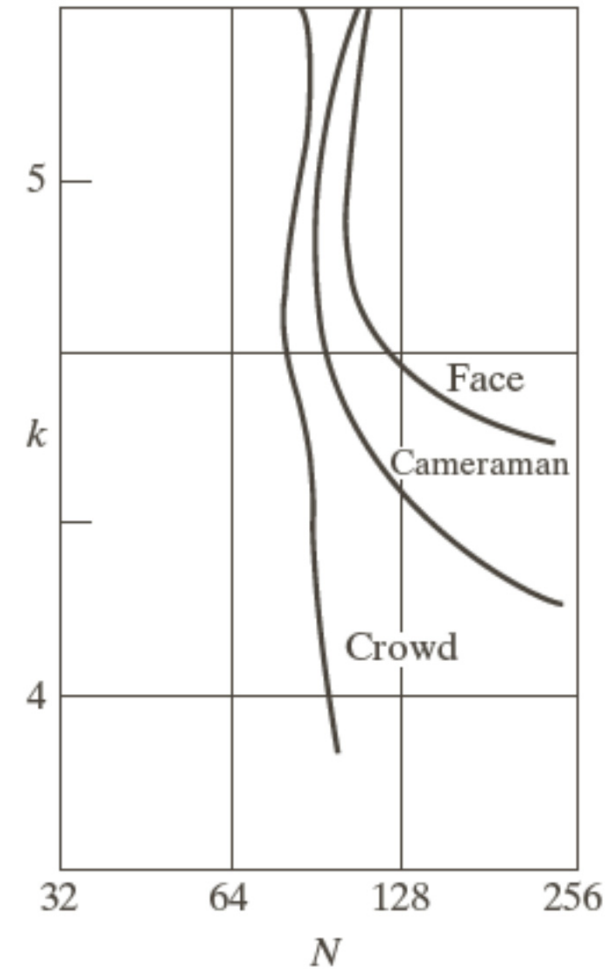


2.4 图像取样和量化



a b c

FIGURE 2.22 (a) Image with a low level of detail. (b) Image with a medium level of detail. (c) Image with a relatively large amount of detail. (Image (b) courtesy of the Massachusetts Institute of Technology.)





2.4 图像取样和量化

- 5、图像内插

- 用于图像放大、缩小、旋转和几何校正等任务

- 用已知数据来估计未知位置的值

- 最近邻内插：将原图中最近邻的灰度赋予每个新位置，存在直边失真

- 双线性内插：将4个最近邻的灰度来计算给定位置的灰度 $v(x, y) = ax + by + cxy + d$ ，计算量大

- 双三次内插：16个最近邻点 $v(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j$ ，保留细节方面优于双线性内插



2.4 图像取样和量化

- 图像缩小与放大的内插方法比较



最近邻



双线性插值



双三次内插值

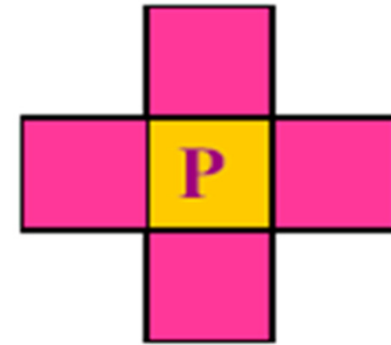


2.5 像素间的一些基本关系

■ 1、像素的相邻像素

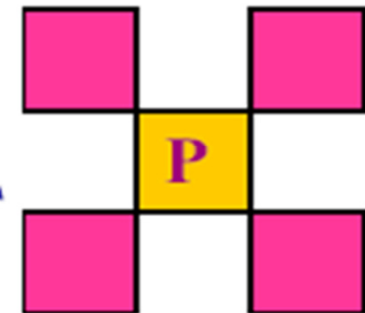
✓ 两个水平两个垂直 $N_4(p)$
 $(x+1,y)$ $(x-1,y)$ $(x,y+1)$ $(x,y-1)$

4-邻域



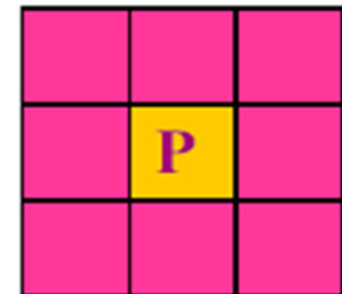
✓ 四个对角相邻像素 $N_D(p)$
 $(x+1,y+1)$ $(x+1,y-1)$ $(x-1,y+1)$ $(x-1,y-1)$

D-邻域



✓ $N_4(p)$ 和 $N_D(p)$ 合在一起就是 $N_8(p)$

8-邻域





2.5 像素间的一些基本关系

■ 2、邻接、连通、区域和边界

V表示邻接的灰度值集合，这里以具有V值的像素p和q

✓ 4邻接

若q在 $N_4(p)$ 中，则称p和q是4邻接（连通）

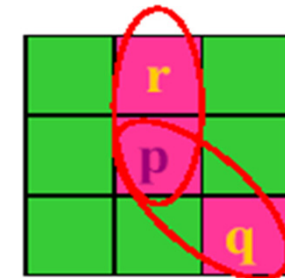
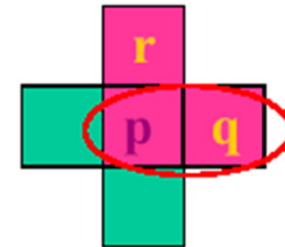
✓ 8邻接

V p q, q在 $N_D(8)$ 中，则称p和q8邻接（连通）

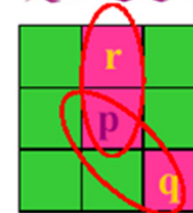
✓ M邻接（混合邻接）

➤ q在 $N_4(p)$ 中

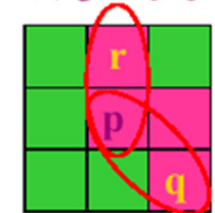
➤ 在 $N_D(p)$ 中，且 $N_4(p)$ 和 $N_4(q)$ 的交集中没有值在V中的像素



是m-连通的



不是m-连通的





2.5 像素间的一些基本关系

- 2、邻接、连通、区域和边界

- 路径

- $p(x_0, y_0)$ 到 $q(x_n, y_n)$ 的数字通路是不同的像素序列，这些像素的坐标 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$
- (x_i, y_i) 和 (x_{i-1}, y_{i-1}) 在 $1 \leq i \leq n$ 时是邻接的， n 是路径长度
- $(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$ 时，形成闭合通路
- 根据邻接类型定义通路类型（4/8/m）



2.5 像素间的一些基本关系

- 2、邻接、连通、区域和边界

- 连通

S表示图像中像素的一个子集

- 若像素p和q在S中存在一个完全由S中像素组成的通路，那么称p和q在S中是连通的
- 对于S中任何像素p，在S中连通到该像素的像素集称为S的连通分量
- 若S仅有一个连通分量，则称S为连通集



2.5 像素间的一些基本关系

- 2、邻接、连通、区域和边界

- 区域

- R是图像的一个像素子集，如果R是一个连通集，则称R为图像的一个区域。
- 须指定所用邻接类型，区域才有意义

- 邻接区域

- 两个区域 R_i 和 R_j （连通集）联合形成一个连通集
- 不邻接的区域称为不相交区域
- 谈区域时，一般考虑的是4邻接和8邻接



2.5 像素间的一些基本关系

- 2、邻接、连通、区域和边界

- 边界（边框或轮廓）

- 若 R 是图像的一个区域，边界 B 是 R 的子集，其上的每个元素的一个或多个邻域像素点不属于 R
 - ✓ 区域 R 中与 R 的补集中的像素相邻的一组像素
 - ✓ 该区域中至少有一个背景邻点的像素集
 - ✓ 区域及其背景中的点之间的邻接通常用8连通定义
 - ✓ 外边界：背景中的对应边界
-
- 若 R 是完整图像，它的边界 B 是图像的第一行（列）和最后一行（列）的所有像素点组成的集合



2.5 像素间的一些基本关系

- 2、邻接、连通、区域和边界

- 边缘

- 边缘是像素点的组合，这些像素点的导数值超过预设阈值，表示灰度不连续
- 边缘与边界的区别：
 - 边缘是一个局部^{局部}的定义，表达像素点与其相邻像素点的灰度变换不连续
 - 边界是全局^{全局}概念，与区域对应
- 在二值图像中，边缘与边界相对应
- 在灰度图像中，边界边缘不等价，但二者相关性较强



2.5 像素间的一些基本关系

- 3 距离测度

- 距离函数或距离测度 D

- $D(p,q) \geq 0$

- $D(p,q) = D(q,p)$ 与方向无关

- $D(p,s) \leq D(p,q) + D(q,s)$

- 欧氏距离 $D_e(p,q) = \left[(x-u)^2 + (y-v)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$

- D4距离（城市街区距离） $D_4(p,q) = |x-u| + |y-v|$

- D8距离（棋盘距离） $D_8(p,q) = \max(|x-u|, |y-v|)$



2.5 像素间的一些基本关系

- P和q之间的D4和D8距离，与可能存在于这些点之间的任何通路无关，因为这些距离仅涉及这些点的坐标。
- 在m邻接下，两点之间的Dm距离定义为两点之间的最短通路，可计为沿该通路分布的像素的值及相邻像素的值（边数目）



2.6 数学工具

- 1 对应元素运算和矩阵运算
 - 对应元素运算是逐个像素执行

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

- 图像矩阵乘积

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$



2.6 数学工具

- 2 线性运算和非线性运算

- 线性运算

$$\begin{aligned} & H[af_1(x, y) + bf_2(x, y)] \\ &= aH[f_1(x, y)] + bH[f_2(x, y)] \\ &= ag_1(x, y) + bg_2(x, y) \end{aligned}$$

加性和同质性



2.6 数学工具

- 3 算术运算

- 两幅图像 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 之间的算术运算包括**加减乘除**

- 例1 图像相加降低噪声

对于原图像 $f(x, y)$, 有一个噪音图像集 $\{g_i(x, y)\}$, $i=1, 2, \dots, M$

$$\underbrace{g(x, y)}_{\text{混入噪声的图像}} = \underbrace{f(x, y)}_{\text{原始图像}} + \underbrace{\eta(x, y)}_{\text{随机噪声}}$$



2.6 数学工具

- 3 算术运算

M个图像的均值为：

$$\begin{aligned}\bar{g}(x, y) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [f_i(x, y) + \eta_i(x, y)] \\ &= f(x, y) + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \eta_i(x, y)\end{aligned}$$

当：噪音 $\eta_i(x, y)$ 为互不相关，且均值为0时，上述图象均值将降低噪音的影响。



2.6 数学工具

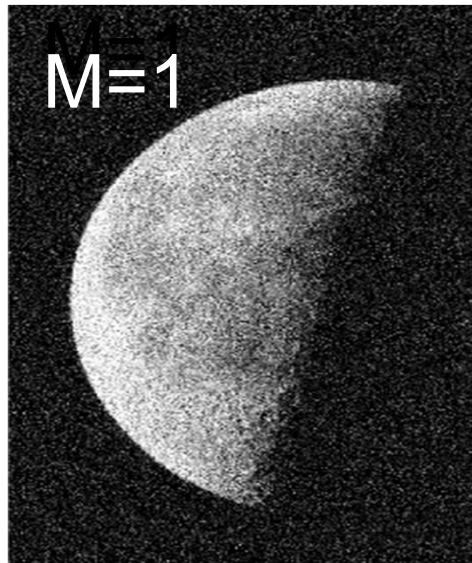
- 3 算术运算

$$\begin{aligned}\bar{g}(x, y) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [f_i(x, y) + \eta_i(x, y)] \\ &= f(x, y) + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \eta_i(x, y)\end{aligned}$$

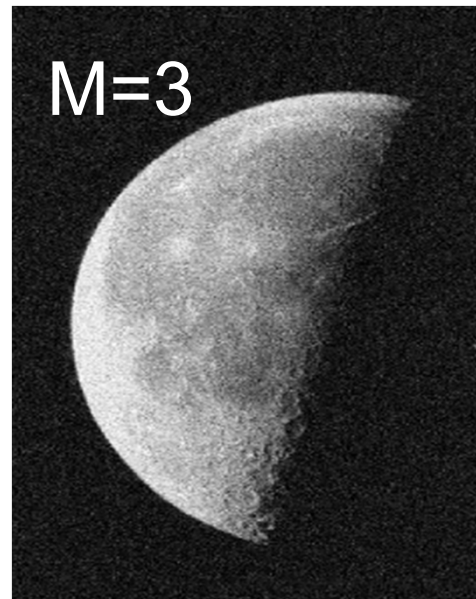
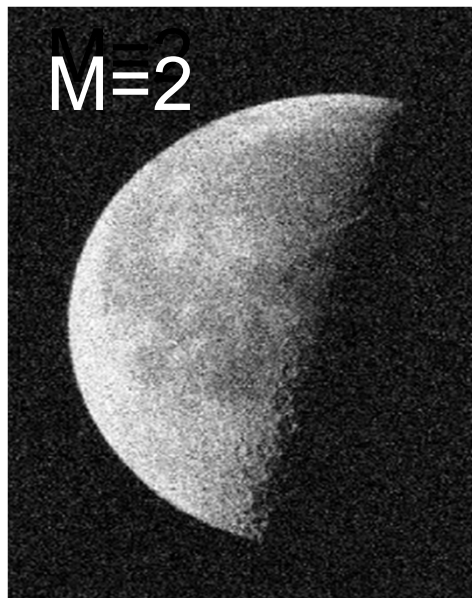
➤ 则 $\bar{g}(x, y)$ 是 $f(x, y)$ 的无偏估计

$$\begin{aligned}\because E\{\bar{g}(x, y)\} &= E\left\{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g_i(x, y)\right\} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M E\{g_i(x, y)\} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \{E[f_i(x, y)] + E[\eta_i(x, y)]\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f_i(x, y) \\ &= f(x, y)\end{aligned}$$



M增大, 则 $\bar{g}(x,y)$ 越逼近 $f(x,y)$





2.6 数学工具

例2 使用图像相减比较图像

设：时刻1的图像为 $T_1(x,y)$,

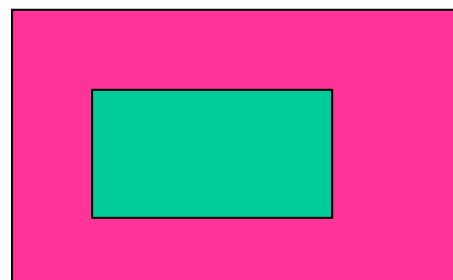
时刻2的图像为 $T_2(x,y)$

$$g(x,y) = T_2(x,y) - T_1(x,y)$$



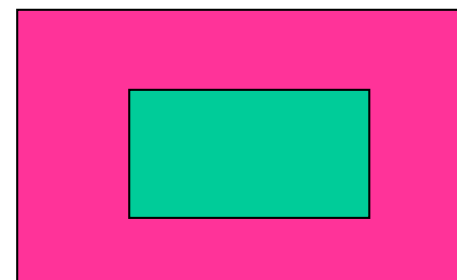
$g(x,y)$

=



$T_1(x,y)$

-

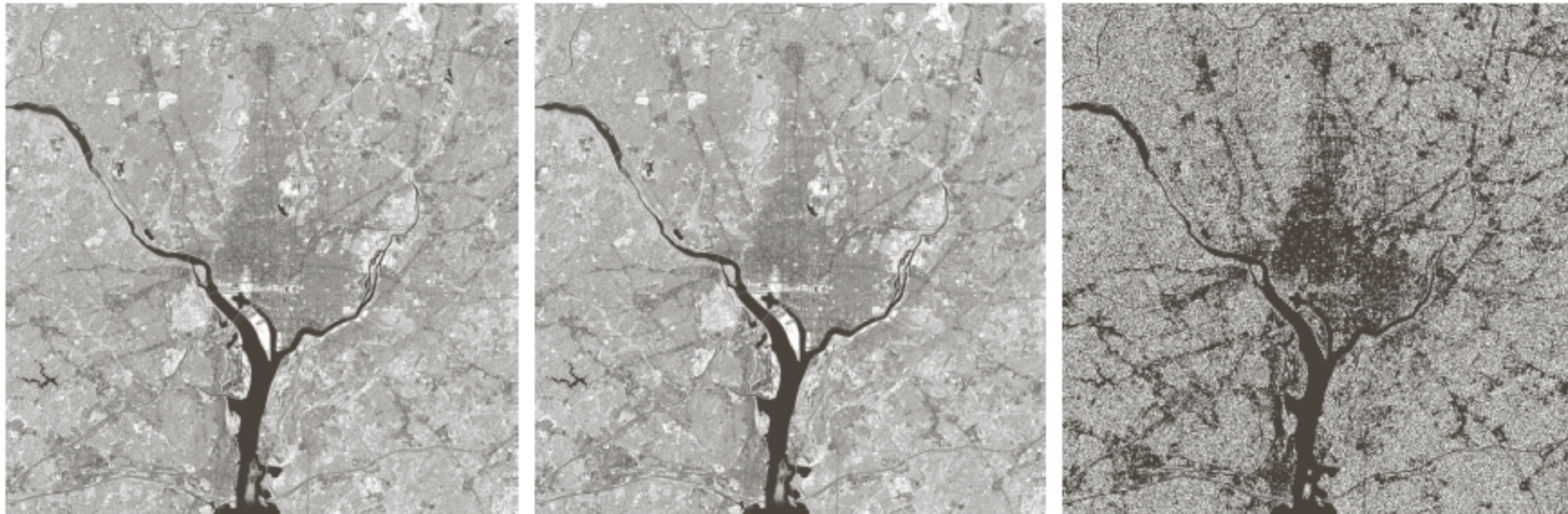


$T_2(x,y)$



2.6 数学工具

例2 使用图像相减比较图像



a b c

FIGURE 2.27 (a) Infrared image of the Washington, D.C. area. (b) Image obtained by setting to zero the least significant bit of every pixel in (a). (c) Difference of the two images, scaled to the range $[0, 255]$ for clarity.

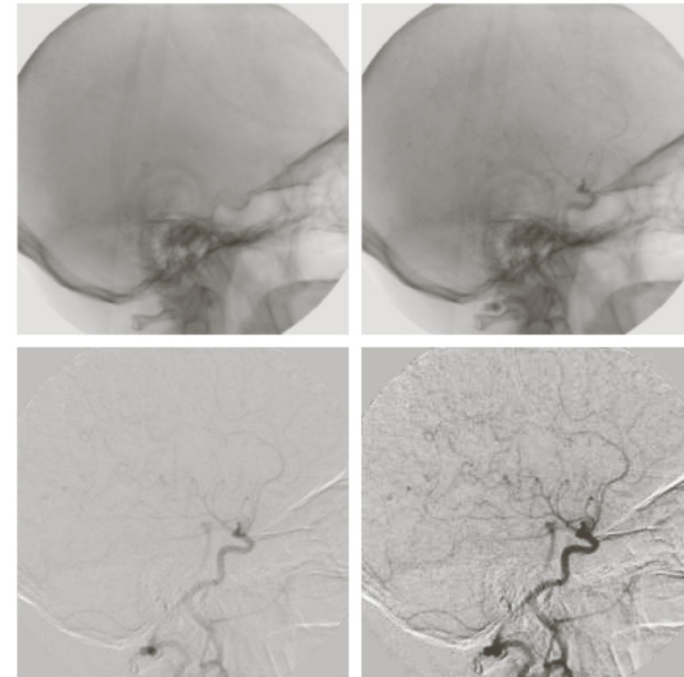


2.6 数学工具

例2 使用图像相减比较图像
模板式射线成像

$$g(x, y) = f(x, y) - h(x, y)$$

$f(x, y)$ 是活体图像，注入造影剂之后得到的， $h(x, y)$ 是模板图像





2.6 数学工具

例3 使用图像相乘/相除校正阴影和模板

完美图像 $f(x,y)$,阴影函数为 $h(x,y)$, 则成像传感器产生的图像可表示为

$$g(x, y) = f(x, y)h(x, y)$$

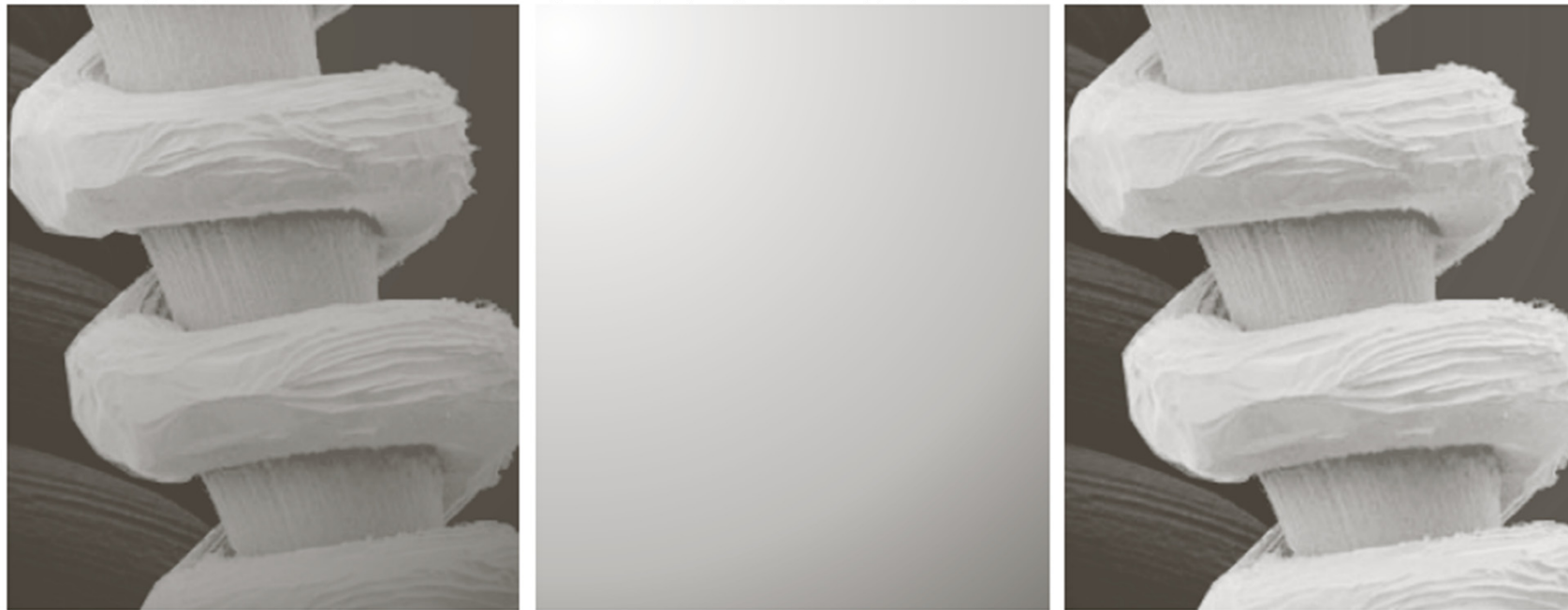
若 $h(x,y)$ 已知或可估计, 则

$$f(x, y) = \frac{g(x, y)}{h(x, y)}$$



2.6 数学工具

例3 使用图像相乘/相除校正阴影和模板



a b c

FIGURE 2.29 Shading correction. (a) Shaded SEM image of a tungsten filament and support, magnified approximately 130 times. (b) The shading pattern. (c) Product of (a) by the reciprocal of (b). (Original image courtesy of Mr. Michael Shaffer, Department of Geological Sciences, University of Oregon, Eugene.)



2.6 数学工具

例3 使用图像相乘/相除校正阴影和模板

模板运算亦称为感兴趣区域运算 (ROI)

给定图像与ROI值为1、其他区域为0的模板图像相乘



a b c

FIGURE 2.30 (a) Digital dental X-ray image. (b) ROI mask for isolating teeth with fillings (white corresponds to 1 and black corresponds to 0). (c) Product of (a) and (b).



2.6 数学工具

- 4 集合运算和逻辑运算

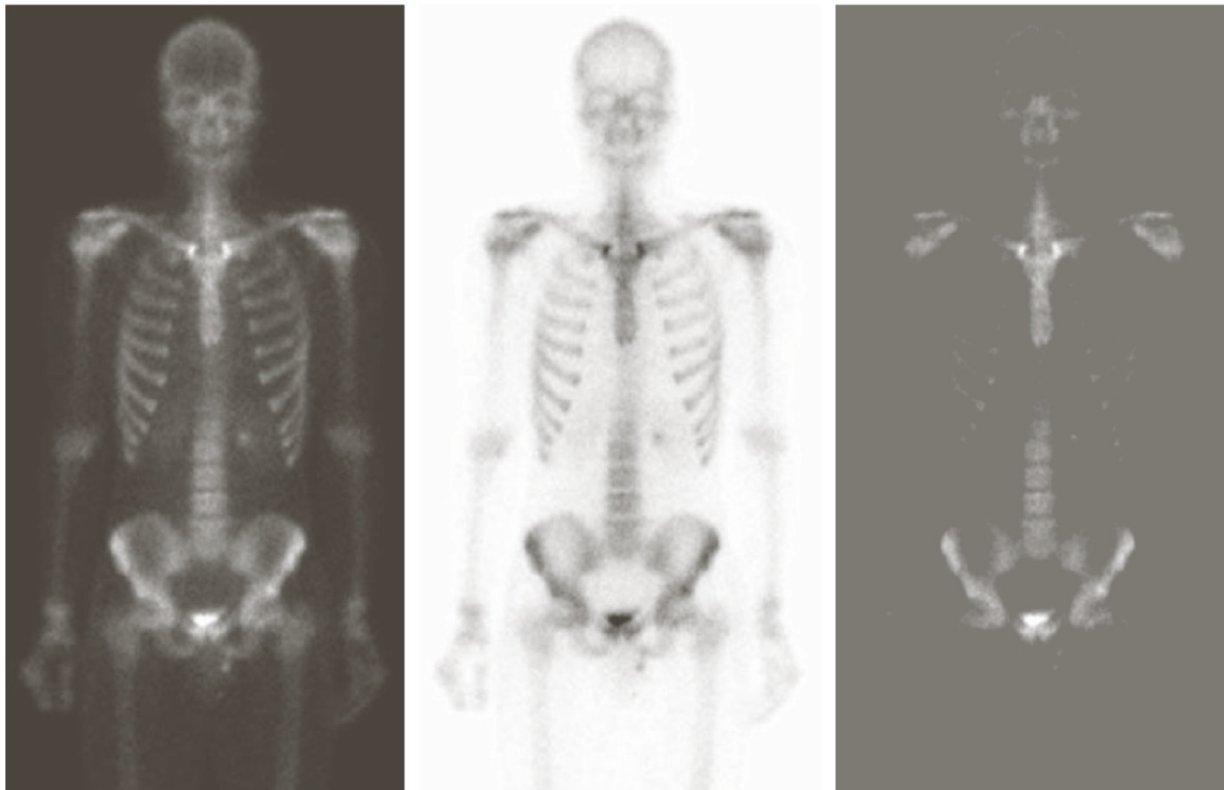
- 1) 基本的集合运算

- $A = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in A\}$
- 补集: $A^c = \{(x, y, K-z) \mid (x, y, z) \in A\}$
- 并集: $A \cup B = \{\max_z(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, 可以视作对应元素的最大化



2.6 数学工具

- 4 集合运算和逻辑运算
- 1) 基本的集合运算



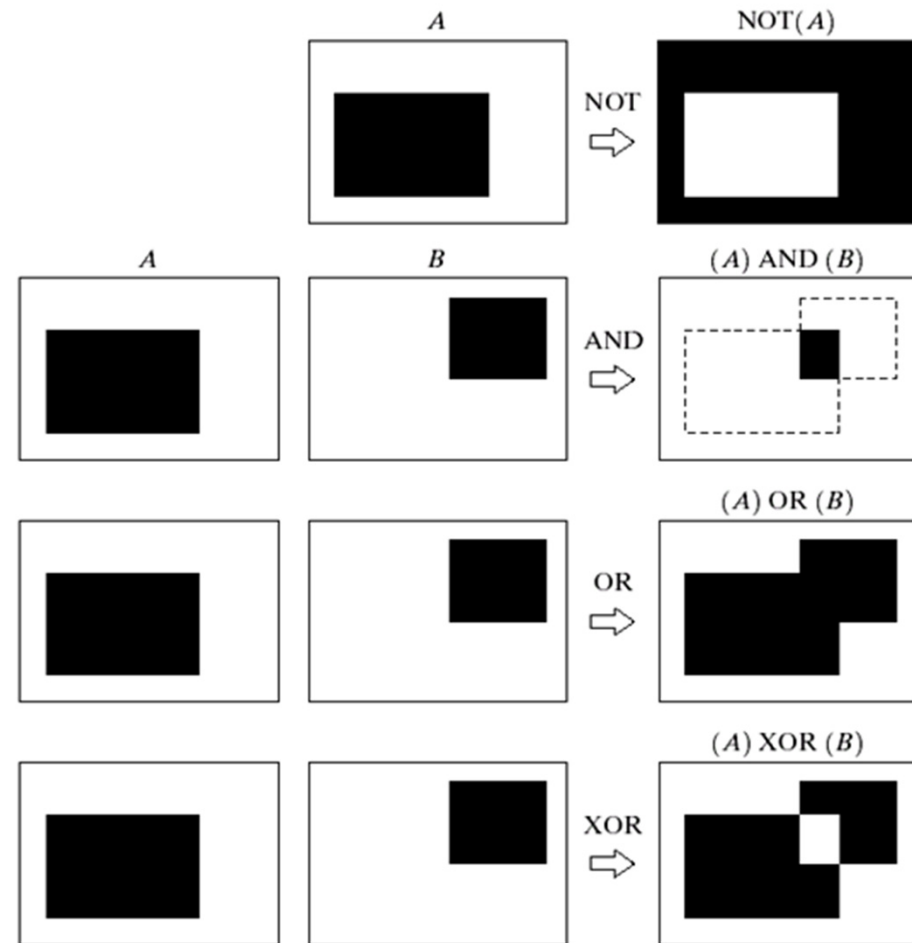


2.6 数学工具

- 4 集合运算和逻辑运算

2) 逻辑运算

与 & 或 & 非 & 异或





2.6 数学工具

- 5 空间运算

- 1) 单像素运算(点运算)

设输入图像 z ，输出图像 s ，则点运算可以表示为：

$$s = T(z)$$

其中 $T()$ 是对输入图像 s 的运算，即点运算是一种像素的逐点运算，是灰度到灰度的映射过程



2.6 数学工具

- 5 空间运算

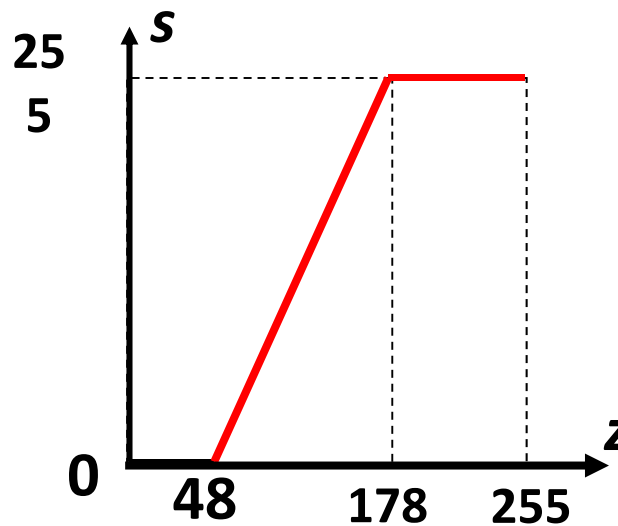
- 1) 单像素运算

例 增强对比度

$$s = az + b$$



变换前



变换后



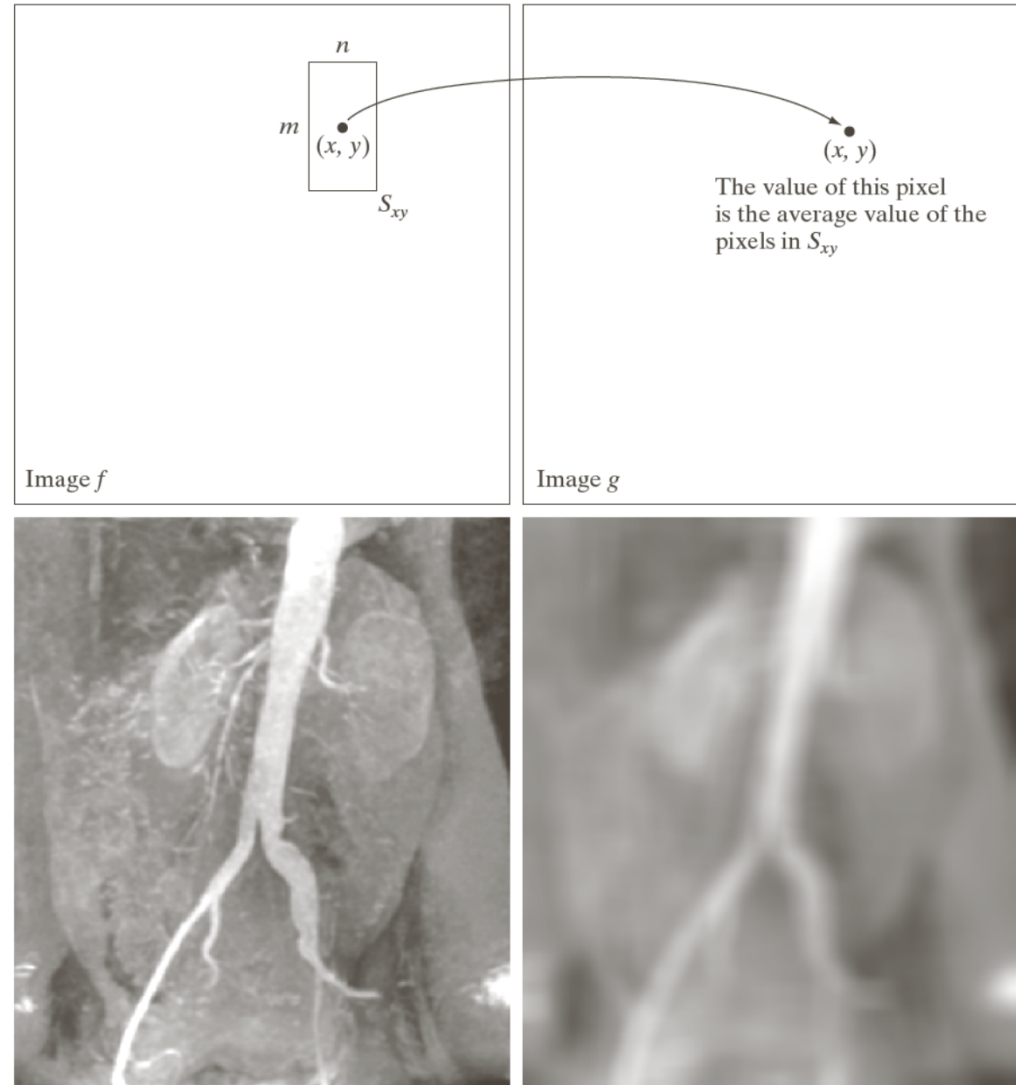
2.6 数学工具

- 5 空间运算

- 2) 邻域运算

$$g(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(r, c) \in S_{xy}} f(r, c)$$

$g(x, y)$ 处的值是邻域中心逐个移动过 f 中的每个像素计算得到





2.6 数学工具

- 5 空间运算 → 3) 几何变换

- 基本概念

- 对原始图像改变其大小、形状和位置
- 变换类型：二维平面图像的几何变换、三维图像的几何变换、三维向二维投影等

- 二维图像几何变换的定义

- 坐标的空间变换
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- 灰度内插，即为空间变换后的像素赋值
- 多项式变换、透视变换



2.6 数学工具

- 5 空间运算 → 3) 几何变换

- 多项式变换

- 基本公式

$$\begin{cases} x' = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N a_{ij} x_i y_j \\ y' = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N b_{ij} x_i y_j \end{cases}$$

- 线性变换：多项式变换中的一阶变换

$$x' = ax + by + e \quad y' = cx + dy + f$$

- 二维图像的基本变换

由线性变换确定图像的平移、缩放、旋转、镜像等



2.6 数学工具

- 5 空间运算 → 3) 几何变换
 - 二维图像基本几何变换的矩阵计算
 - 原始图像与目标图像的变换函数为线性函数
→ 线性矩阵
 - 齐次坐标法: $n+1$ 维表示 n 维向量
变换矩阵 T , 几何变换为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{仿射变换}$$



2.6 数学工具

- 5 空间运算 → 3) 几何变换
 - 二维图像几何变换（矩阵计算）具有的特征：
 - 变换前图像上每一点，在变换后的图像上均有一确定的对应点
 - 平行直线变换后仍保持平行，相交直线变换后仍相交
 - 变换前直线上的线段比等于变换后对应的线段比



2.6 数学工具

- 5 空间运算 → 3) 几何变换

■ 二维图像几何变换（矩阵计算）具有的特征：

➤ T可分解为两个子矩阵

$$T = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➤ 子矩阵1: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

用于图像的恒等、比例、镜像、旋转等变换

➤ 子矩阵2: $[e \ f]^T$

实现图像的平移变换



2.6 数学工具

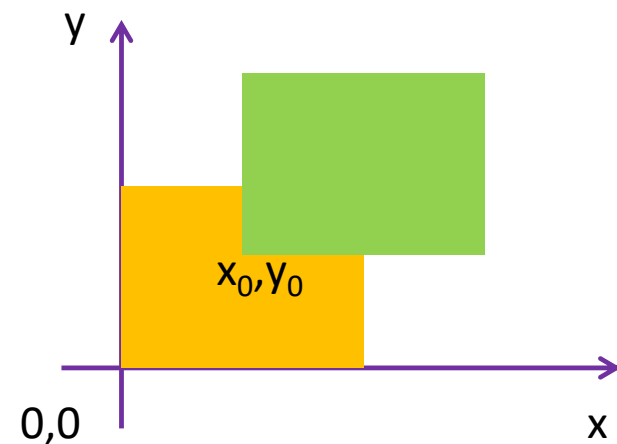
- 5 空间运算 → 3) 几何变换

- 平移变换（只改变位置，不改变大小和形状）

设 $a(x, y) = x + x_0; b(x, y) = y + y_0$

有 $g(x', y') = f(x + x_0, y + y_0)$

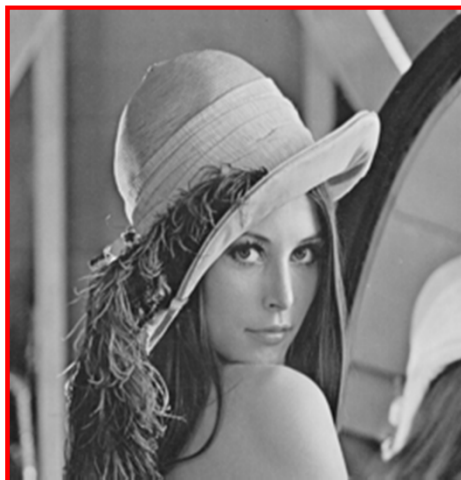
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



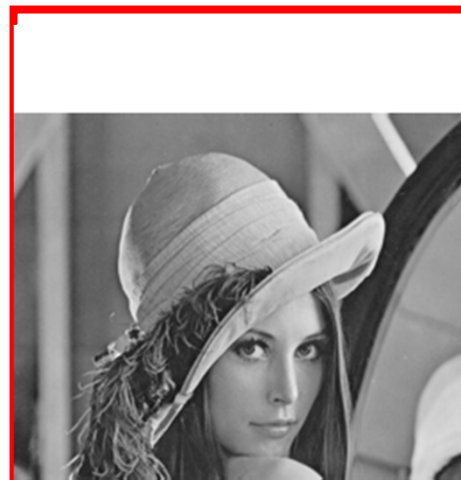


2.6 数学工具

- 5 空间运算 → 3) 几何变换
- 平移变换



(a) 原始图像



(b) 平移后的图像

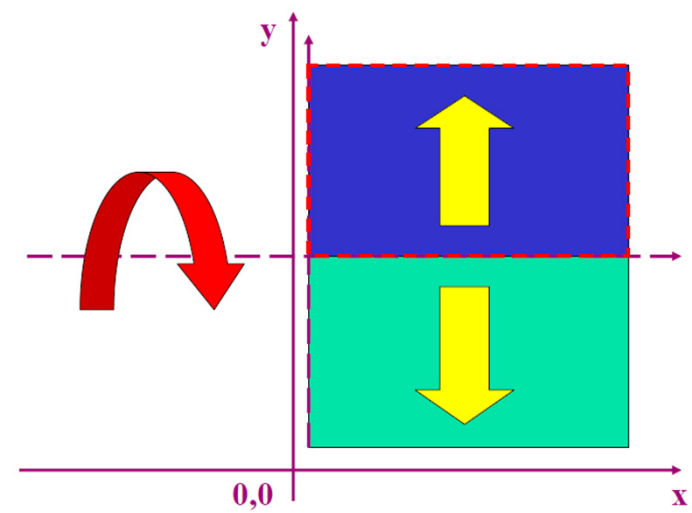
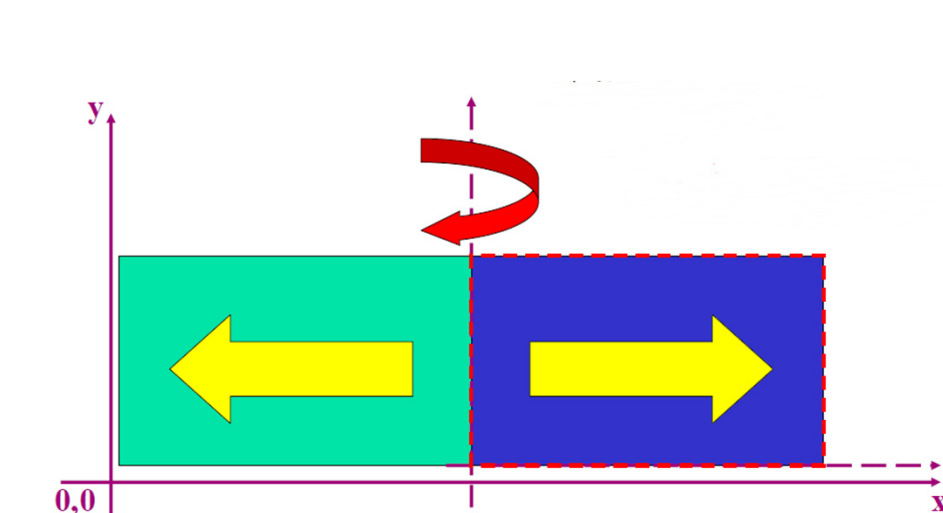


2.6 数学工具

● 5 空间运算 → 3) 几何变换

□ 镜像：原图像相对于某一参照面旋转180°。

水平镜像 相对于y轴
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$
 垂直镜像 相对于x轴
$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$





2.6 数学工具

● 5 空间运算 → 3) 几何变换

□ 镜像：原图像相对于某一参照面旋转 180° 。



(a) 原始图像



(b) 垂直镜像



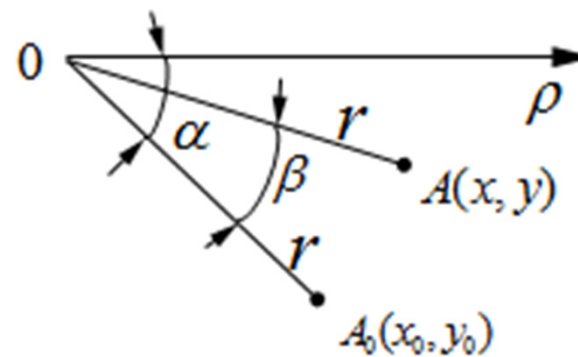
2.6 数学工具

● 5 空间运算 → 3) 几何变换

□ 旋转：以图像中心为原点，旋转一定角度
原图像点 $A_0(x_0, y_0)$ 的原始角度
为 α 的坐标如下：

$$\begin{cases} x_0 = r \cos a \\ y_0 = r \sin a \end{cases}$$

经旋转角 β 到新位置 $A(x, y)$






2.6 数学工具

- 5 空间运算 → 3) 几何变换

- 旋转

$$\begin{cases} x = r \cos(\alpha - \beta) = r \cos \alpha \cos \beta + r \sin \alpha \sin \beta \\ y = r \sin(\alpha - \beta) = r \sin \alpha \cos \beta - r \cos \alpha \sin \beta \end{cases}$$

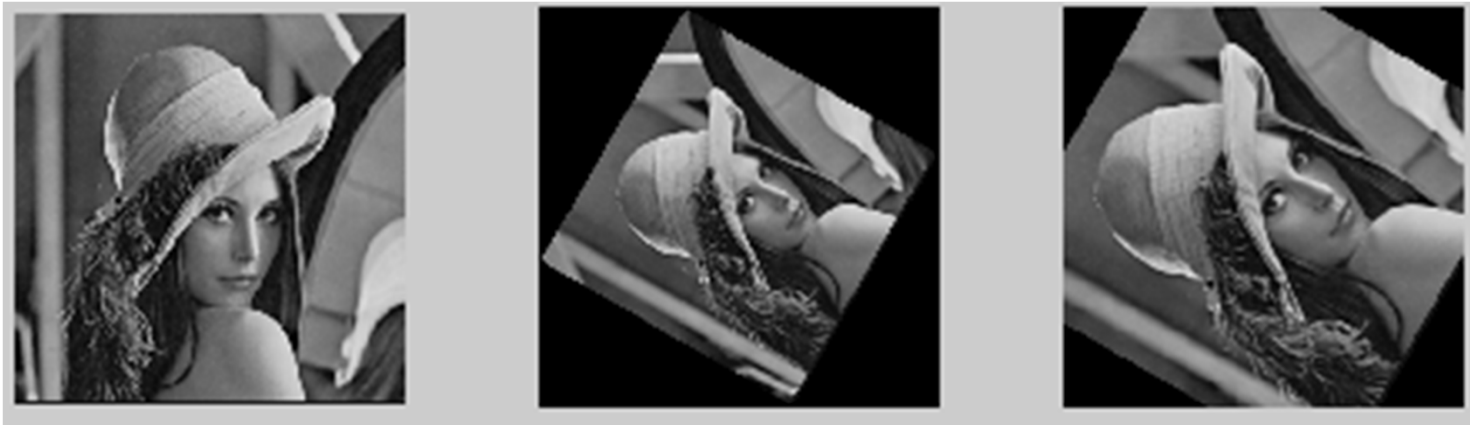
$$\begin{cases} x = x_0 \cos \beta + y_0 \sin \beta \\ y = -x_0 \sin \beta + y_0 \cos \beta \end{cases}$$


$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



2.6 数学工具

- 5 空间运算 → 3) 几何变换
 - 旋转



(a) 原图

(b) 旋转图

(c) 旋转图



2.6 数学工具

- 5 空间运算 → 3) 几何变换

- 旋转

注意事项:

- 图像旋转之后出现空洞点 → 插值处理 (行/列插值)
- 画布大小问题 → 修剪旋转图像/扩大画布



2.6 数学工具

- 5 空间运算 → 3) 几何变换

□ 图像错切

平面景物在投影平面上的非垂直投影效果

X方向错切:

$$\begin{cases} x' = x + d_x y \\ y' = y \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

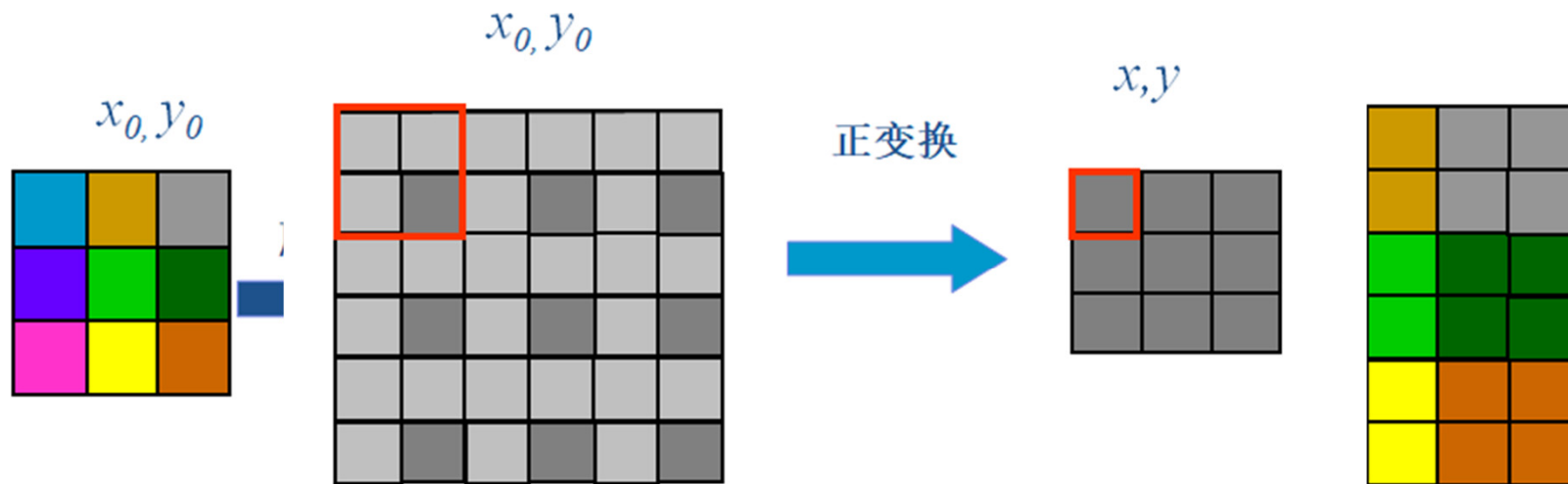
Y方向错切:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + d_y x \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



2.6 数学工具

- 5 空间运算 → 3) 几何变换
 - 图像缩小/放大 (全比例缩放变化)
 - 原图像在x/y方向上按照相同比例c进行缩小放大
 - 比例缩放前后两点 $A_0(x_0, y_0)$ 和 $A(x, y)$ 之间的关系:





2.6 数学工具

- 5 空间运算 → 4) 图像配准
 - 用于对齐同一场景的两幅或多幅图像
 - 对输入图像做几何变换，使输出图像与参考图像对齐（配准）
 - 多幅图像间的比较，需要进行几何失真补偿：
 - 使用**约束点**进行几何失真补偿，这些约束点的精确位置是输入图像和参照对象中已知的对应点
 - 估计**变换函数**（建模）



2.6 数学工具

- 5 空间运算 → 4) 图像配准

➤ 估计变换函数：建模

$$X = C_1 V + C_2 W + C_3 VW + C_4$$

$$y = C_5 V + C_6 W + C_7 VW + C_8$$

输入图像(v,w)

参考图像(x,y)



两幅图像找出四对对应的约束点，求解8个未知参数C1~C8。





2.6 数学工具

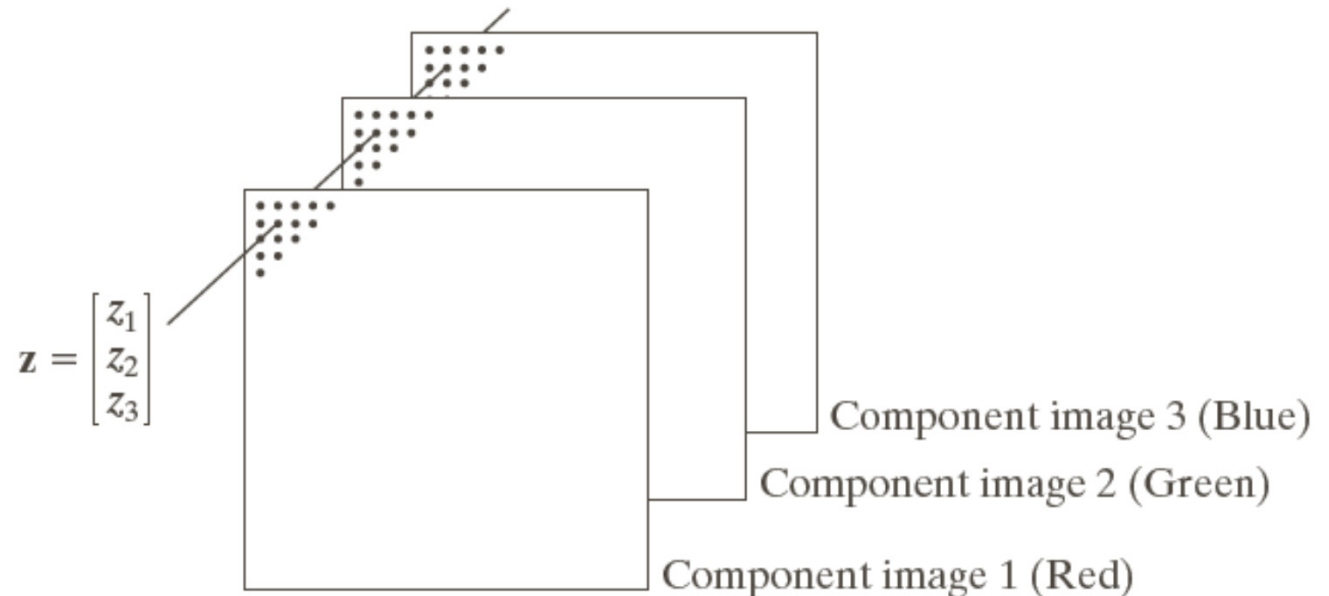
- 6 向量与矩阵运算

多光谱图像处理是向量矩阵运算的典型领域

■ RGB图像形成的彩色图像 $M \times N \times 3$

每个像素对应三个分量

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$





2.6 数学工具

- 6 向量与矩阵运算

- 对于n维向量a和b，其内积（点积）：

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &\triangleq \mathbf{a}^T \mathbf{b} \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\ &= \sum_{i=1}^n a_i b_i\end{aligned}$$

- 内积的平方根

$$\|\mathbf{z}\| = (\mathbf{z}^T \mathbf{z})^{\frac{1}{2}}$$



2.6 数学工具

- 6 向量与矩阵运算

- 向量的另外一个优点在线性变换中

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{a})$$

\mathbf{A} $m \times n$, \mathbf{z} 和 \mathbf{a} $n \times 1$

- 广泛的图像线性处理

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \mathbf{n}$$

\mathbf{g} 表示处理后的图像 $MN \times 1$;

\mathbf{H} 表示对输入图像进行线性处理的 $MN \times MN$ 矩阵;

\mathbf{f} 表示输入图像的 $MN \times 1$ 向量;

\mathbf{n} 表示 $M \times N$ 噪声模式的 $MN \times 1$ 向量



2.6 数学工具

- 7 图像变换
 - 在变换域执行图像处理任务，执行完再执行反变换，返回空间域

$$T(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) r(x, y, u, v) \quad \text{正变换}$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} T(u, v) s(x, y, u, v) \quad \text{反变换}$$



2.6 数学工具

- 7 图像变换
 - 线性变换域执行图像处理的基本步骤
 - 对输入图像做变换
 - 执行图像处理操作
 - 执行反变换





2.6 数学工具

- 7 图像变换
 - 离散傅里叶变换

$$T(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} T(u, v) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

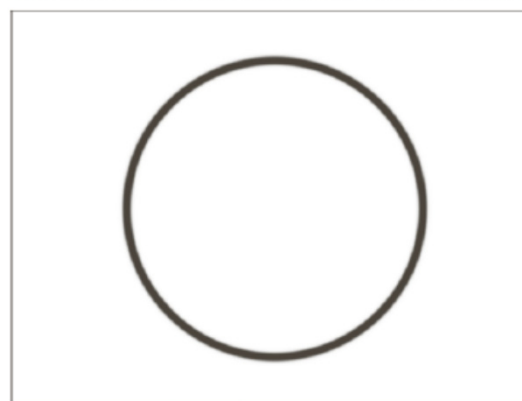
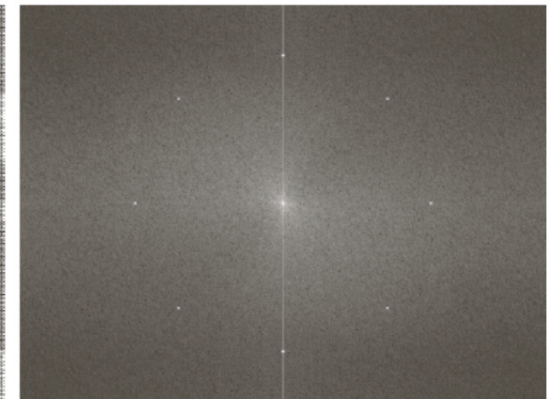


2.6 数学工具

- 7 图像变换

- 例：变换域中的图像处理

- 空间域，干扰以灰度波动的形式出现
- 频率域，以明亮的灰度脉冲群实现
- $f(x,y) \rightarrow |T(u,v)| \rightarrow$
滤波器 \rightarrow 修改后的
图像





2.6 数学工具

- 8 图像灰度与随机变量
 - $z_i, i=0,1,2,\dots,L-1$ 表示一幅 $M \times N$ 数字图像中所有可能的灰度值。灰度级 z_k 在这幅图像中出现的概率 $p(z_k)$ 计算为

$$p(z_k) = \frac{n_k}{MN}$$

$$\sum_{k=0}^{L-1} p(z_k) = 1$$



2.6 数学工具

- 8 图像灰度与随机变量
 - 已知 $p(z_k)$ ，可以求出相关图像特性：

均值 $m = \sum_{k=0}^{L-1} z_k p(z_k)$

方差 $\sigma^2 = \sum_{k=0}^{L-1} (z_k - m)^2 p(z_k)$

n阶中心矩 $\mu_n(z) = \sum_{k=0}^{L-1} (z_k - m)^n p(z_k)$



杭州电子科技大学
HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY

Digital Image Processing

谢谢！